

# Bruchzahlen, Zahlenstrahl und geometrische Modelle mit flexiblen Interviews verstehen

## Einleitung

*Neu: Aufgaben nach zunehmendem  
Schwierigkeitsgrad geordnet plus Kroki*

Stefan Meyer, Dozent HfH

Revidierte Version 02.02.2010; 2013; 2016



# Bruchzahlen verstehen - das Erkenntnisinteresse

Über welche Erfahrungen verfügen Personen im Umgang mit Symbolen und geometrischen Darstellungsformen von Bruchzahlen?

Wie differenzieren sie zwischen und innerhalb der natürlichen Zahlen und der Bruchzahlen?

Diesen Fragen widmeten sich Studierende der HfH im Studienjahr 07/08 und 08/09 in Explorationsstudien. Diese erstreckten sich über mehrere Niveaus der Arithmetik und fordert die Kinder zum operativen Interpretieren von Symbolen von Bruchzahlen heraus.

Es spielte keine Rolle, in welcher Klasse die Schüler waren oder ob sie die Bruchzahlen schon behandelt hatten oder nicht. Brizuela (2006) forderte, dass die symbolischen Darstellungen von Brüchen intensiver erforscht und im Unterricht als generative Teile integriert werden müssten.

Durch unsere Explorationsstudien wurde ein Set von sieben offenen Aufgaben erzeugt und erprobt. Die Resultate der ersten Studie (Vorübung und Aufgabe 1) liegen vor. Sie sind auf der Webseite des flexiblen Interviews publiziert worden. Die Häufigkeitsverteilungen der zweiten Studie sind auf der Lernplattform abgelegt. Die zweite Studie befindet sich in der Auswertungsphase.

Zur Zeit steht ein Set von offenen Aufgaben zur Verfügung, mit dem man das Verständnis von Korrespondenzen zwischen

Bruchzahlsymbolen und geometrischen Darstellungen und Figuren qualitativ prüfen kann. Die Auseinandersetzung mit den Aufgaben kann im Unterricht oder in der Diagnostik stattfinden.

Die Methode für den Umgang mit diesen Aufgaben ist [das flexible Interview](#). Jede Begegnung zwischen Personen bildet eine einzigartige pädagogische oder psychologische Situation.

Die untersuchende Person handelt aus, ob die Aufgaben einzeln oder, wie es ein Kroki zeigt, als multiple Handlungszyklen gelöst werden («single or multiple cycles of action», vgl. Bruce (2010, S. 51)).

Ich danke allen, die zum Gelingen dieser Projekte beigetragen haben und beitragen werden.

# Die Inhalte der flexiblen Interviews

Folie 4 zeigt die Interviews im Überblick. Sie sind nach ansteigenden Schwierigkeitsgraden (p) geordnet. Die Zahl der untersuchten Kinder ist mit «n» angegeben. Die Interviews erforschen folgende Themen:

1. Was versteht das Kind unter einem Viertel (enaktiv mit Würfeln)?
2. Was versteht das Kind unter einem Viertel (ikonisch mit Quadrat)?
3. Zur Klärung des Vorverständnisses macht man die Vorübung mit dem Zahlenstrahl. - Zahlenstrahl und einfache Bruchzahlen
4. Verdoppeln von  $1 \frac{1}{2}$  und die Summe oder das Produkt auf dem Zahlenstrahl zeigen.
5. Was versteht das Kind symbolisch, wenn es eine Fläche von  $\frac{1}{2}$  mal  $\frac{1}{2}$  m<sup>2</sup> berechnen soll?
6. Was kommentiert das Kind, wenn es einen Würfel mit der Seitenlänge 1 und acht Würfel mit der Seitenlänge vor sich hat? Enaktive und dialogische Auseinandersetzung mit dem Begriff des Volumens / Rauminhaltes.
7. Die symbolische Auffassung eines Achtels erörtern.
8. Die symbolische Auffassung eines Vierundsechzigstels erörtern. (= nicht normierte Zusatzaufgabe)

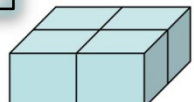
**Dimensionen der flexiblen Interviews.** Die Auswahl und die Reihenfolge der Interviews trägt dem Schwierigkeitsgrad und der Komplexität Rechnung. Dabei sind Fragen im Spiel wie: denkt das Kind noch additiv, indem es die Teile im Verhältnis zum Ganzen addiert oder subtrahiert? Kann das Kind multiplikativ denken, indem es Beziehungen zwischen den Teilen und dem Ganzen mit multiplikativen Argumenten mit Hilfe von Flächen erläutert? Oder denkt das Kind, / die Jugendliche multiplikativ und dreidimensional, wenn es die Verhältnisse zwischen Teilen und dem Ganzen mit dem Würfelvolumen erklären kann?

Die Anschauungsmittel erlauben kohärentes Operieren, sei es enaktiv, sei es symbolisch mit dem numerischen Schreibsystem (NSS) der Bruchzahlen. Das Kroki (siehe Folie 5) skizziert, wie die Aufgaben in vier Etappen behandelt und gedanklich vernetzt werden könnten. Im Zentrum stehen mathematische und metakognitive Problemstellungen und Betrachtungen vom Kindergarten bis zur Sekundarstufe.

Die Darstellungsformen und die Darstellungsmittel sind geometrische Objekte (Würfel, Flächen, Zahlenstrahl, Volumen), welche die Arithmetisierung herausfordern (Wittmann, 2006). Auf Alltagsobjekte wie Kuchen oder Lego wurde bewusst verzichtet.

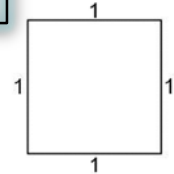
# Die flexiblen Interviews, geordnet nach den Schwierigkeitsgraden ( $p$ )

**1**



$p = .80$   
 $n = 193$

**2**



$\frac{1}{4}$   
 $p = .76$   
 $n = 156$

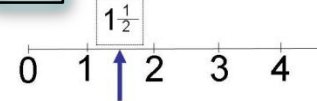
0	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	3	keine
---	---------------	----------------	---	-------

$p = .50$   
 $n = 203$

**3**

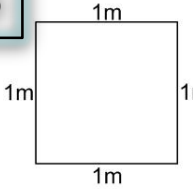


**4**

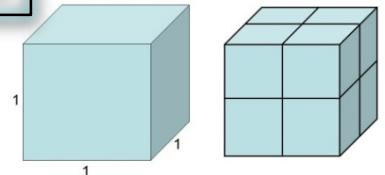


$p = .50$   
 $n = 201$

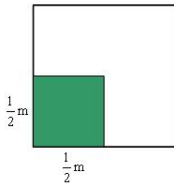
**5**



**6**

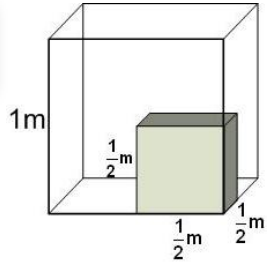


$p = .20$   
 $n = 166$

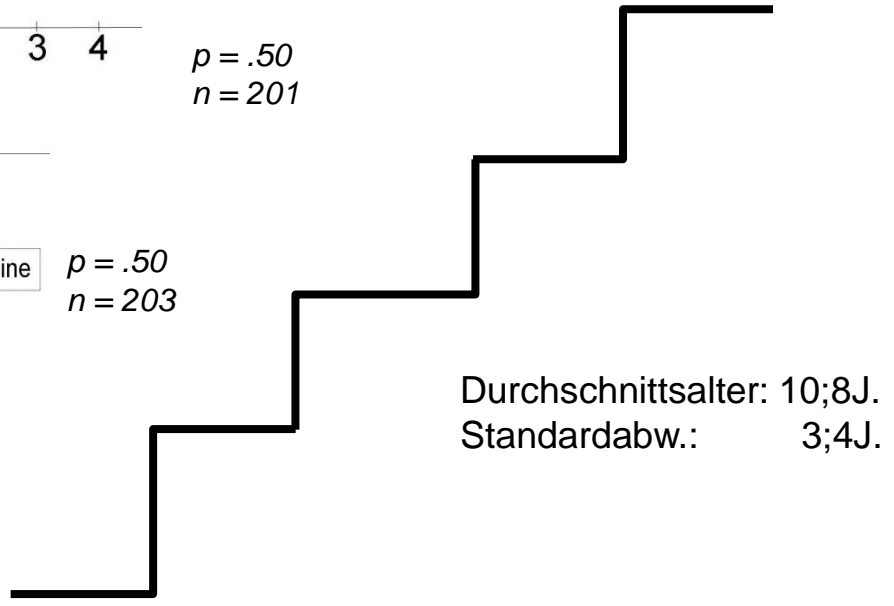


$p = .20$   
 $n = 166$

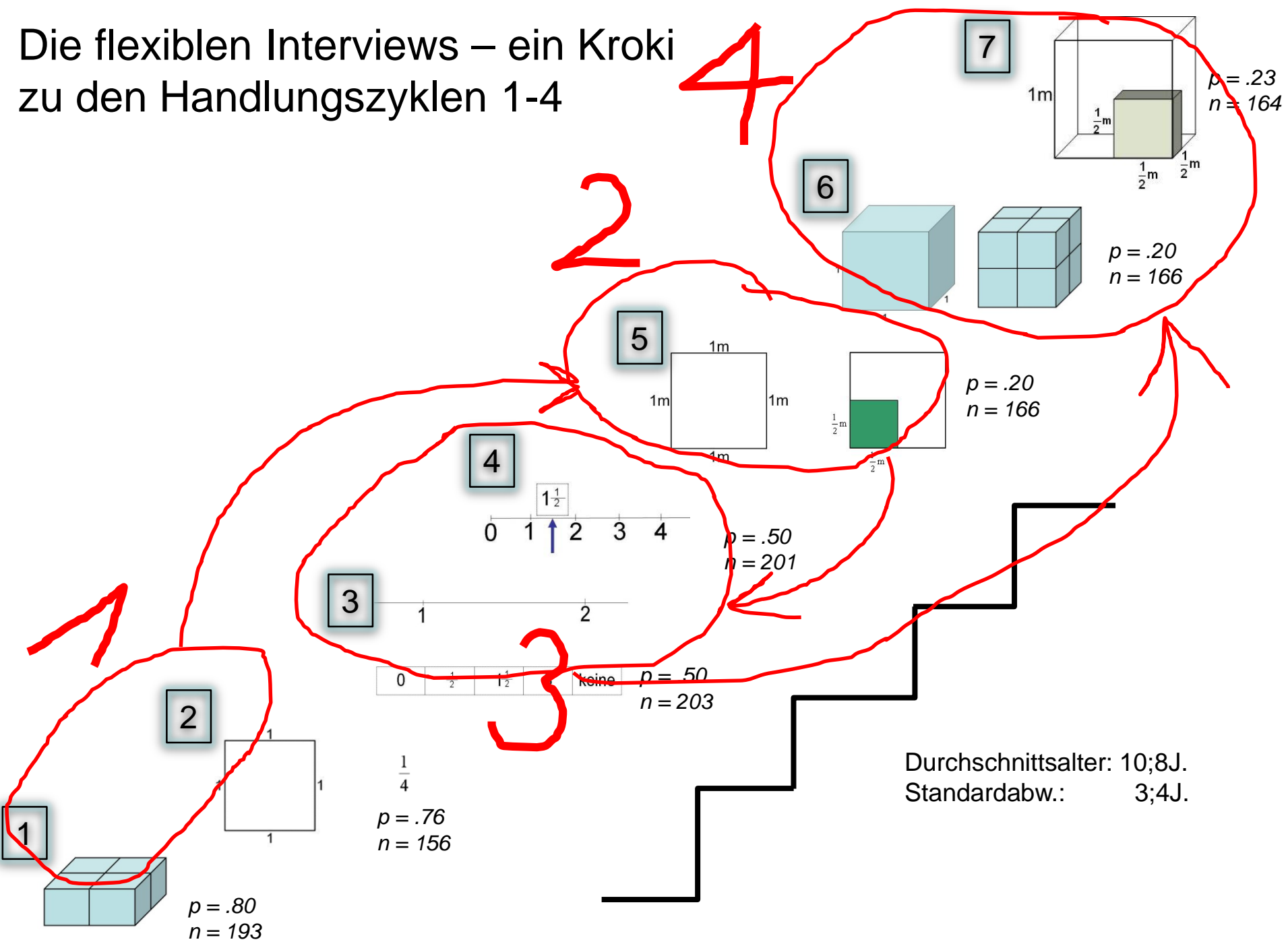
**7**



$p = .23$   
 $n = 164$



# Die flexiblen Interviews – ein Krokis zu den Handlungszyklen 1-4



# Hinweise für die Durchführung und Erfahrungen

In den Explorationsstudien konnten Erfahrungen mit den Interviews ab dem Kindergartenalter gesammelt werden. Die Stichprobe reicht bis in die Sekundarstufe 1. Das Durchschnittsalter in der zweiten Studie betrug 10;08 Jahre, die Standardabweichung betrug 41 Monate = 3;05 Jahre (N=207).

Wenn man alle **Aufgaben als Serie von Tests** stellen möchte, sollte man rund 30 Min. reservieren. Die durchschnittliche Durchführungszeit betrug rund 23 Min. (N=207; s = 8 Min.). Befasst man sich mit einer **Aufgabe als ausführliches flexibles** Interview, so benötigt man für eine einzelne ca. 15-20 Min.

Wie erwähnt, können die Aufgaben einzeln oder in kleinen Gruppen gestellt werden. Dann sollte man sie wie eine offene Aufgabe behandeln, bei der die Kinder unter der Moderation der Pädagogin kooperativ Erfahrungen sammeln und austauschen können. Die 'kognitive Akzeleration' (Adey, 2008) liefert ein ausgezeichnetes Handlungsmodell für den Umgang mit offenen Aufgaben.

Am Anfang hilft es, wenn man die Gespräche mit Tonband oder mit einer Videokamera aufzeichnet und erst danach protokolliert und interpretiert.

Teile den Kindern mit, welches das Ziel der Befragung ist: Das Offenlegen der Denk- und Handlungsmöglichkeiten im Umgang

mit einfachen Bruchzahlen.

Berechne das Alter der Kinder in Monaten, z.B.:

- 2009 / 06 / 20 (Stichtag der Forschungsübung)
- 1999 / 07 / 07 (Geburtstag des Kindes)
- 09 / 11 / 13 (Differenz)
- 119 Mt. Lebensalter in Mt. ( $9 * 12 + 11$ )
- *15 Tage und mehr werden aufgerundet.*

Folgende Materialien sollte man bereitstellen:

Papier-Vorlage des Würfels mit der Seitenlänge 1, acht gleich grosse Holzwürfel (Bezug bei Pastorini, Zürich) Arbeitsblatt, Bleistift, Schere, Zettel (C5 oder C6), PC, falls man die Aufgaben digital vorstellen will.

Die Folien der einzelnen Aufgaben sind nach dem folgenden Muster aufgebaut:

- Die Instruktion zum Unterthema,
- Die Vorlage, welche man ausdrucken soll. Bei der Vorübung hat es auch noch eine Kopiervorlage zum Ausschneiden von Zahlenkarten.



# Spezielle Hinweise für die Durchführung

Die Wahl des Materials und der Etappen (Handlungszyklen) soll mit dem Kind oder dem Jugendlichen festgelegt werden.

Dränge das Kind nicht mit Suggestionen zur „richtigen Lösung“. Das ist erfahrungsgemäss am Anfang gar nicht so leicht.

Hegel empfahl, mit der *beobachtenden Vernunft* zu arbeiten. Dieses Motto hilft, die eigene Aktivität positiv zu gestalten. Neugier macht kreativ. Sie bildet einen Schutz gegen Belehrungsversuche.

Das Kind oder der Jugendliche sollen ausdrücken und zeigen, was sie denken und was sie machen, was sie können und was sie noch nicht so gut beherrschen. In den flexiblen Interviews sind alle Denkwege der Kinder und Jugendlichen etwas Bedeutsames. Es geht um dialogisch erforschbare und bestimmbare Einsichten, die sich in einer Entwicklung befinden. Die Entwicklung ist nicht nur etwas Statisches oder Psychologisches. Entwicklung ist v.a. etwas Soziales und Pädagogisches.

Stichwort 'Joker'. Das Kind oder die Jugendliche sollten von Anfang an wissen, dass sie die Versuchsleiterin bzw. die Pädagogin um den Joker bitten können. Dann zeigt man dem Kind, wie man die Aufgabe selber löst. Sprich, worüber du nachdenkst. Formuliere auch metakognitive Überlegungen. Danach fragst du: «Möchtest du das jetzt auch probieren?»

Beende jede vom Kind oder dem Jugendlichen behandelte Aufgabe mit einer metakognitiven Betrachtung (vgl. Adey, 2008). Die Fragen sind auf den Aufgabenvorlagen formuliert.

Du hast bei jeder Aufgabe die Möglichkeit, mit dem Kind den Abbruch des flexiblen Interviews auszuhandeln. Besprich die Motive fair. Danke dem Kind oder Jugendlichen, dass sie dich darüber aufklären, wie junge Personen lernen, die Bruchzahlen zu verstehen. Halte mit dem Kind oder dem Jugendlichen Ausschau (Bridging), wie die Auseinandersetzung mit den Bruchzahlen weitergehen könnte.

Bringe in Erfahrung, ob das Kind die Lernziele im Fach, im Förderbereich (Mathematik) insgesamt gut, teilweise gut, weniger gut oder nicht erfüllt.

Beobachte, wie gut die sprachlichen Kompetenzen des Kindes entwickelt sind. Übernimmt es bereits in der ersten Sitzung Elemente aus deiner Art, zu kommunizieren und mit den Objekten zu handeln (vgl. dazu das Konzept der Zone der nächsten Entwicklung i.S. von Wygotski, 1986)? Auch dazu machst du im Datenformular / im Protokollblatt einen Eintrag.

Fragen bitte an [Stefan.Meyer@hfh.ch](mailto:Stefan.Meyer@hfh.ch) schicken.