Interkantonale Hochschule
für Heilpädagogik

Eine Anlage für die dialogische Diagnostik und Didaktik der Logik arithmetischer Operationen

(Berthoud & Kilcher (1987; übersetzt und kommentiert von S. Meyer)

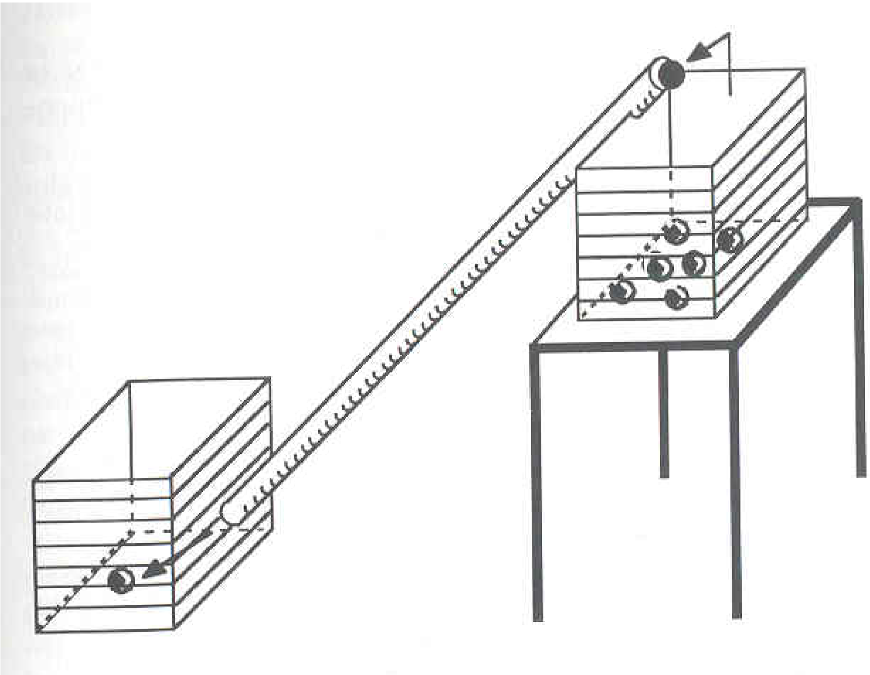

Abbildung 4

Man zeigt dem Kind alle 7 Kugeln (die Anzahl lässt sich variieren, siehe Abbildung 4), die man in die obere Schachtel legt. Eine Variante besteht darin, dass das Kind nur noch die untere Schachtel betrachten und auf die Fragen Antwort geben soll. „Hier liegt eine Kugel, wie viele sind dann noch oben?" „Wenn ich die 3. Kugel von 7 herunter gelassen habe, wie viele sind dann noch oben?" „Warte, bevor du die 4. Kugel herunterlässt. Wie viele hat es unten? Wie viele hat es oben?"

Die *Ordinalzahlen* bezeichnen die Reihenfolge des Herunterrollens für die 7 Kugeln.

Die *Kardinalzahlen* bezeichnen die Mengenverhältnisse, gesamthaft sind es hier 7, die Teilmengen variieren je nach Spielstand. Das lässt sich in der Gleichung symbolisieren: Anzahl Kugeln (unten) + Anzahl Kugeln (oben) = Anzahl Kugeln (gesamt). Die Terme beschreiben ganz bestimmte Spielstände im Verhältnis zur Gesamtzahl (der Kardinalzahl).

Können die Kinder diese *Mengenverhältnisse* (gesamthaft und in den Wechselwirkungen zu den Teilmengen oben und der Teilmenge unten) in ihren Operationen schon berücksichtigen? Wie stellen sie diese Mengenverhältnisse her? Welche dialektischen sowie logisch-arithmetischen Denkwerkzeuge stehen schon zur Verfügung? – Berthoud & Kilcher (1987) konnten bei den fünf- bis neunjährigen Kindern vier Entwicklungsniveaus beobachten. Der Entwicklungsverlauf zwischen dem Angewiesensein auf Anschauung und der Gewandtheit im Umgang mit reinen Vorstellungen ist spannend und faszinierend.

Kommentar zur Abbildung 4
Die spielerische Anlage lädt zum *Handeln* und *mentalen Operieren* ein. Die Gesamtmenge kann in den Experimenten variiert werden, entsprechend dem Niveau und dem Interesse der Kinder. Sie können die Menge selber bestimmen. Die *Fragen* zielen auf die Koordination und die Einsicht in Handlungen, in denen die Reihenfolge des Herunterrollens von Kugeln verknüpft ist mit den Fragen nach den Mengenverhältnissen zwischen den Teilen und der Gesamtmenge.
Beides, das Handeln und das Fragen provoziert Versprachlichung. Wenn man nach konkreten oder grafischen Darstellungen den Apparat zudeckt, fordert das die Vorstellungskraft zusätzlich heraus.
Ein weiterer Schritt betrifft den Aufbau und die Differenzierung der schriftlichen Darstellung (Zettelwirtschaft, Darstellungsformen (Zahlen, Pfeile, Tabellen u.a.), Erfinden von konkreten und fiktiven Aufgaben, Verständnis von Gleichungen, Algebra, siehe van den Heuvel-Panzhuizen, 2001).
Diese einfache und günstige Anlage trägt Wesentliches zu einem handlungsorientierten Lernen bei. Die Kinder haben die Möglichkeit, die Logik der Bedeutungen ihres Handelns permanent auf die Probe zu stellen und darüber zu diskutieren. Die Handlungen mit dem konkreten Apparat können mündlich, grafisch oder symbolisch dargestellt werden (van den Heuvel-Panhuizen, 2001).

Fallbeispiel: Lin, 4;5
Wir betrachteten die Abbildung 4 im eingescannten Originaltext. Lin zählte die 6 Kugeln am Boden der Schachtel. Danach zeichnete ich den Apparat auf ein Blatt, wobei sich in der oberen Schachtel nur 4 Kugeln befanden. Ich befragte sie zuerst zu einfachen Zusammenhängen. Was ist oben, wenn unten eine Kugel liegt? - «3». Was ist, wenn unten 2 Kugeln liegen? – «Beide 2». Was ist, wenn unten 4 liegen? – «Dann hat es unten viel, (ohne zu zählen) 4!, oben nichts mehr.»
Und wenn ich oben 1 dazu nehme? – «Dann sind es fünf», sagte sie, ohne zu zählen. Wenn unten 2 liegen? – «Dann hat es oben 3», antwortet sie auch ohne zu zählen.
Und wie ist es jetzt bei dieser Abbildung 4, wenn wir die Kugel oben beim Rohr auch zu den anderen nehmen? – «7», antwortet sie blitzschnell, «nein, 8», doppelt sie nach. «Was ist jetzt wahr hier oben?» wollte ich wissen. – Lin: «Es sind 7.» (Insgesamt sind es 8 sichtbare Kugeln, aber das habe ich nicht überprüft durch Nachfragen.)
Zuletzt stellte ich die Frage nach Berthoud und Kircher (1987, S. 57f., Aufgabensituation I) bei fünf Kugeln in der oberen Schachtel der Zeichnung. Lin musste nun Kardinalzahlen und Ordinalzahlen

kombinieren: «Lin, du lässt eine um die andere Kugel runter. Bevor du die dritte Kugel runter lässt, wartest du kurz für die Frage: «Wie viele hat es unten…. und oben ?» - Lin zählt ab und sagt: «Unten zwei, oben drei.» Das Experiment mit der verdeckten Anlage habe ich nicht durchgeführt.

Ausblick

Die ursprüngliche Forschung von Berthoud und Kilcher (1987) ist *eine reichhaltige Plattform* für weitere Entwicklungsarbeiten und Fallstudien. In den Aufgaben wird das Wissen um die Kardinalzahlen mit dem Wissen über die Ordinalzahlen verknüpft. Mit der Spielanlage und der Spielanlage als Modell können die logisch-mathematischen Verhältnisse (Teil-Ganze, arithmetische (mentale) Operationen, Zahlaspekte, Rechengesetze, logisches Schlussfolgern, Darstellungsmittel: konkret bis mündlich abstrakt) in mentale Operationen konvertiert und zu Aussagen über Probleme formuliert werden (vgl. Duval, 1993; Riley, Greeno & Heller, 1983). Es sind nicht bloss Abbildungen, die man abzählen sollte, wie das bei den sogenannten Zahlenhäusern der Fall werden kann. Das Experiment will von Anfang an mehr Denkdruck erzeugen, wie es Wagenschein (1999) nennt. Es erfasst die Denkentwicklung der Kinder und gleichzeitig die methodischen Kompetenzen derjenigen, welche die flexiblen Interviews durchführen.

Ausgewählte Anzahl Kugeln : 8	
unten	oben
1	7

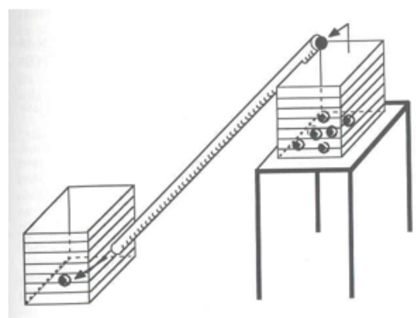

Abbildung 5: Spielanalage und tabellarische Darstellungsform

Die dynamische Untersuchung der Denk- und Handlungsschemata und die dynamische, dialogische und experimentelle mathematische Bildung fokussieren auf die Kunst des logischen und arithmetischen Denkens. Darum sind auch die mentalen Spiele mit dieser Anlage so wichtig. Sie äussern sich in Fragen wie: Stell dir die Anlage mit geschlossenen Augen vor (oder bei abgedeckter Anlage). Was wäre oben und unten, wenn ich von 12 Kugeln die vierte in der Hand hielte und wartete? Usf.

Das pädagogische Entwicklungsziel wäre nicht die Bearbeitung leerer Zahlenhäuser, sondern konkrete und imaginierte Spielanlagen oder andere Modelle wie der Bustransport, welche je nachdem konkret oder symbolisch dargestellt werden könnten (vgl. van den Heuvel-Panzhuizen, 2001). Entscheidend ist das

mathematische Gedankenspiel, sei es beim Spiel oder bei den Gedankenspielen und deren Darstellungsformen (enaktiv-bildlich-symbolisch).
Handlungsmodelle könnten auch mit dem Methodenkonzept der kognitiven Akzeleration kombiniert werden. Der Ansatz vereinigt die Grundannahmen von Piaget mit denjenigen von Wygotski (vgl. Adey, 2008).

Literatur

Adey, P. (2008). *Let’s Think! Handbook. A Guide to Cognitive Acceleration in the Primary School*. London: GL assessment.

Berthoud, I., Kilcher, H. (1987). Implications et significations arithmétiques. In J. Piaget, R.,Garcia (Hrsg.), *vers une logique des significations* (S. 57-71). Genève: Édition Murionde.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37–65.

Riley, M. S., Greeno, J.G., Heller, J.I. (1983). Development of Children's Problem-Solving Ability in Arithmetic. In H. P. Ginsburg (Hrsg.), *The Development Of Mathematical Thinking* (S. 153-196). Orlando: Academic Press Inc. (Übersetzung Stefan Meyer, 2013)

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education as work in progress. In F.-L. Lin (Hrsg.), *Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education* (S. 1–43). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.

Wagenschein, M. (1999). *Verstehen lehren*. Weinheim: Beltz Verlag.

24.01.07, 01.02.2019 (Fallbeispiel) Stefan Meyer