HfH Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik

Der Würfel-Differenzler

Ich hingegen meine, Bildung besteht darin, zur Kreativität zu ermutigen, auch wenn es nur wenige schöpferische Menschen gibt, auch wenn die Kreativität mancher Kinder gegenüber anderen beschränkt ist. Aber wir brauchen Erfinder und Neuerer, keine Konformisten. (Piaget; zit. nach Bringuier, 2004, S. 195)

Stefan Meyer, 2014 (überarbeitete Version)

Abstract

«Dice-Difference» is a game similar to the well-known Swiss card-play "Differenzlern" in which every player fixes his number of points he probably can reach in a round according to the value of his nine cards. The differences between the estimation and the obtained points will been added at the end of a couple of rounds. In the «Dice-Difference-Game» every color of a dice represents a position of the decimal number system. Players declare a target-number (integer or decimal fraction). Then they play at dice trying to reach the target-number as well as possible. After reaching or surpassing the target-number, the players note the differences between target and obtained number for every round. The winner has the smallest sum of a couple of differences. It is a funny game and a mathematical experience.

Inhalt

Einleitung
Der Würfel-Differenzler wurde in Anlehnung an den Differenzlerjass entworfen. Der Differenzlerjass gilt als die schwierigste, aber auch fairste Spielart. Jeder Teilnehmer hat die Möglichkeit, sowohl mit wertvollen Karten als auch mit einem schwach dotierten Blatt zu gewinnen. Man ordnet die erhaltenen Jasskarten. Danach wird die erreichbare Punktesumme eingeschätzt und den Gegenspielern mitgeteilt (Egg, 1989).

Beim Würfel-Differenzler sind die Möglichkeiten des Taktierens eingeschränkt, dafür ist das Spiel leichter verständlich. Die mathematischen Schwierigkeiten und die Komplexität sind veränderbar und adaptiv.

Material
Verschieden farbige Würfel, bei fortgeschrittenen Spielern in mehrfacher Ausführung, Schreibblock und Schreibzeug bereithalten.

Worum geht es in diesem Spiel?
Das Spiel ist ein Spiel und keine verkappte Rechenstunde. Das ist der wichtigste Grundsatz. Die Spieler und Spielerinnen können das Spiel organisieren, <u>wie es ihnen gefällt</u>.

Beim Würfel-Differenzler wird das Erreichen einer Zielzahl in möglichst wenigen Würfen angestrebt. Die Spieler kombinieren Spielglück, taktisches Operieren und das Rechnen. Sie entwickeln fortlaufend Optimierungen. Die Differenz zur Zielzahl soll möglichst klein werden. Die Zielzahl wird von den Spielerinnen und Spielern selber festgelegt. Es ist ziemlich wahrscheinlich, dass sie eine Zielzahl wählen, die sie verstehen oder die sie interessiert. Das taktische Operieren muss ebenfalls geregelt werden.

Was taugt der Würfel-Differenzler?
Das Spiel ist abgesehen vom Unterhaltungswert ein gutes Medium, um das Schätzen von Zahlen und das taktische Strukturieren und Verteilen von Zahlen zu üben. Die Spieler pendeln laufend zwischen den Teilmengen, die man schon besitzt, und der ganzen Menge, die man vereinbart hat (= Zielzahl). ‚By the way' strukturieren die Spieler Zahlenmengen im Zehnersystem, sie berechnen Summen und Differenzen (mit Zehnerübergängen und Bündelungen) im vereinbarten Zahlenraum. Weiter haben sie die Möglichkeit, erhaltene Punkte zu addieren oder zu subtrahieren. Dies müssten sie allerdings den Spielpartnern im Voraus oder nach dem Wurf mitteilen. Die soziale Kontrolle der Entscheidungen und Operationen ist unmittelbar und hoch. Die Kommunikation ist angeregt, das Klima gelassen. Die Spieler zeichnen Tabellen, in welche sie die Spielverläufe und die Resultate der Operationen eintragen.

Spielverläufe und Spielergebnisse liefern Daten im Überfluss, mit denen man Fragestellungen oder Hypothesen mathematisieren kann. Ich danke Gianfranco Arrigo, prof. dipl. math. ETH, herzlich für die wertvollen Hinweise. Ebenso danke ich Claire Meljac und Constance Kamii sehr für die kritischen

Würdigungen des Spiels. Besonders danke ich Barbara Walt, SHP, ihre Unterrichtsbeobachtungen zählen zu den Grundsteinen dieses Spiels.

In den folgenden Abschnitten werden die Spielvarianten exemplarisch vorgestellt. Die theoretischen Dimensionen und Möglichkeiten des Mathematisierens werden auch skizziert.

Spielvariante im Kindergarten

Im Kindergarten werden kleinere Zielzahlen und eventuell nur ein Würfel, der die Einer symbolisiert, eingesetzt. Die Kinder kümmern sich noch nicht um die Stellenwerte.

Abbildung 1

Notizen einer einfachen Spielrunde

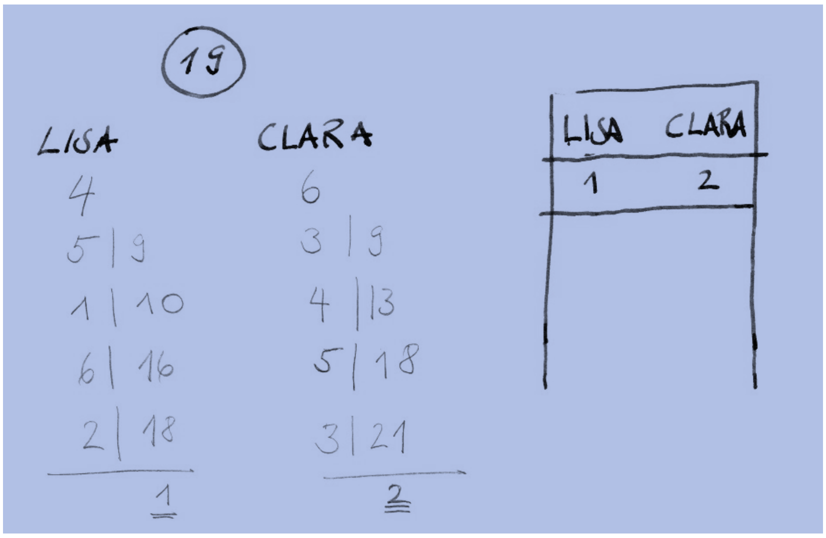

Abbildung 1 dokumentiert eine Spielrunde zwischen Lisa und Clara. Die beiden haben es mit einem Würfel auf die Zielzahl 19 abgesehen. Links der Trennungslinien haben sie die gewürfelte Zahl aufgeschrieben. Rechts davon die Zwischensumme. Lisa hatte 18 Punkte, als Clara die Zielzahl mit dem Wurf einer Drei um zwei Punkte verpasste. Die Differenz haben sie separat protokolliert.

Spielvariante für Fortgeschrittene

Wenn Spieler mit zwei oder mehrstelligen Zahlen grössere Zielzahlen erreichen möchten, dann ordnen sie verschieden farbige Würfel den Stellenwerten zu. Jetzt addieren, bündeln und übertragen sie die gewürfelten Punkte gemäss den Farben und den Stellenwerten des Zehnersystems.

Spielregeln und arithmetische Kenntnisse sollen zwischen den Spielern und Spielerinnen besprochen werden. Im folgenden Beispiel verfügen sie bereits über Kenntnisse der symbolisierten Zahlen und Stellenwerte im Hunderterraum.

In höheren Klassen werden vier- oder fünfstellige Zahlen angepeilt und entsprechend mehr verschiedenfarbige Würfel festgelegt (siehe Abb. 1). Farbige Würfel können auch anderen dezimalen

Stellenwerten zugeordnet werden, siehe Abb. 2. Zudem könnten Ziffernwürfel mit acht oder zehn Seiten zum Einsatz kommen.

Abb. 2

Spielvereinbarung mit Einern und Zehnteln

Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	.	Zehntel	Hundertstel
				.		

Differenzierung

Komplexität

Abbildung 2 illustriert eine Spielvereinbarung, nach welcher der oder die weissen Würfel Einer symbolisieren. Der blaue oder die blauen Würfel symbolisieren die Zehntel. Im Spiel-Protokoll, siehe Tabelle 1, müsste die Zahl 4.6 notiert werden. Hätte man Würfel mit vier verschiedenen Farben, könnte die Spielvereinbarung und die Zielzahl noch komplexer gestaltet werden.

Man könnte zudem vereinbaren, dass man bei einem Wurf auf eine negative ganze Zahl spekuliert und diese von den bisherigen Punkten *subtrahiert*.

Es sein nochmals betont, dass auch die komplexeren Spielvarianten von den Kindern frei gewählt werden. Gut gemeinte Anordnungen, Arbeitsblätter und ähnliches sind verboten. Das Spiel darf und soll all dies implizit thematisieren.

Abb. 3

Spielvereinbarung mit Zehnteln und Hundertsteln

Tausender	Hunderter	Zehner	Einer	•	Zehntel	Hundertstel
				•		

Abbildung 3 illustriert eine Variante mit einem achtseitigen Würfel. Der Rote symbolisiert die Zehntel, der Grüne die Hundertstel. Im Spiel-Protokoll, siehe Tabelle 1, müsste die Zahl 0.17 notiert werden. Mit acht- oder zehnseitigen Würfeln (oder Glücksrädern) würde die Zahl der Operationen (Bündelungen: umbündeln, entbündeln; siehe Padberg, 2005) deutlich erhöht.

Die theoretische Landkarte des Spiels

Das folgende Diagramm zeigt auf, worum es in diesem Spiel implizit geht.

Abbildung 4

Strukturen des Spiels

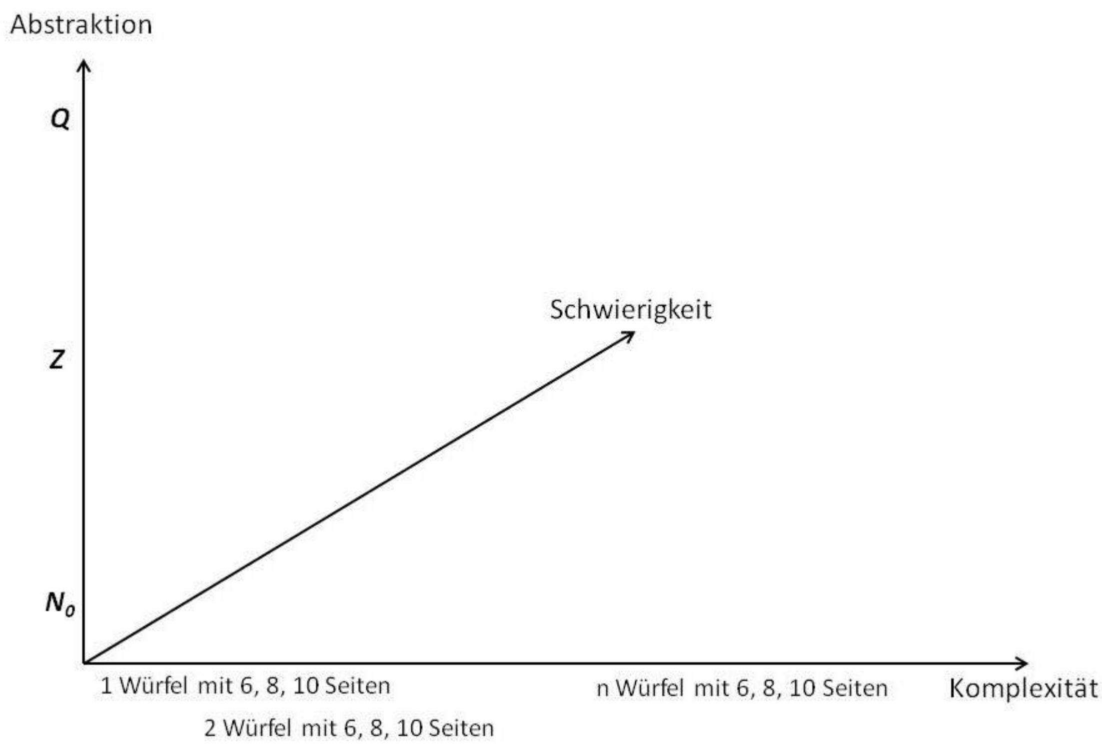

Abbildung 4 verdeutlicht Strukturen des Spiels. Anfänglich bewegen sich Spielende eher in der Zone der natürlichen Zahlen *(N)* und sie verwenden einen Würfel. Die Strukturen des Zehnersystems sind noch nicht aufgebaut. Die Zielzahl will gut verstanden sein. Mit zunehmender Spielerfahrung sowie mit zunehmendem Wissen und Alter wird das Spielmaterial komplexer *(*N_0; Würfel mit einer Null). Auch die Zielzahlen werden schwieriger und abstrakter *(Q)*. Am Schluss kann man das Spiel algebraisch beschreiben. Das Diagramm verdeutlicht eine weitere Synthese, die sich an das Konzept der kognitiven Akzeleration anlehnt. Auf der einen Seite liegen die Bezugspunkte der genetischen Erkenntnistheorie sowie der reflektierenden Abstraktion von Piaget (1977, 1983).

Ähnlich wie beim Verständnis des Murmelspiels stellt sich die Frage, wie die Entwicklungen der Regelanwendung und der Regelbewusstheit im Spiel und in der Mathematik vor sich gehen. Die Spieler und Spielerinnen sollen das Spiel autonom organisieren. Sie entscheiden selber, welche Differenzierungsgrade (Komplexität, Schwierigkeitsgrad) bedeutsam sind. Sie definieren die Regeln mit ihren Worten und Gedanken. All dies wird dem impliziten Lernen zugeordnet (Kamii, 1985; Oerter. 2012). Auf der andern Seite können Entwicklungszonen beobachtet, beschrieben und gezielt in die pädagogisch-psychologische Lernförderung integriert (Wygotski, 1986). Die Erfahrungen werden in das Spielen sowie in die mathematische Bildung integriert.

Die Synthese beider Aspekte wurde im Konzept der kognitiven Akzeleration vorgenommen und mit Erfolg erprobt (Adey und Shayer, 1994; Adey, 2004, 2008). Dabei werden Lernende über mehrere

Jahre einmal pro Woche in einem offenen und themenzentrierten Diskurs unterstützt. Diese Diskurse erwiesen sich als sehr effektiv für den Lernzuwachs in allen Fächern.

Beispiel eines einfachen Spielverlaufes

Zwei Kinder (oder mehr) treten gegeneinander an. Sie haben zwei weisse und zwei blaue Würfel zur Verfügung. Die Weissen für die Zehner, die Blauen für die Einer. Die Spieler, Max und Sophie, müssen bei jedem Spielzug Würfel werfen, aber sie sind komplett frei in der Wahl der Würfel. Die Spielzüge bilden zusammen ein Spiel, in dem man die Zielzahl trifft oder ihr möglichst nahe kommt. Max und Sophie einigen sich auf die Zielzahl 99.

Tabelle 1

Spiel-Protokoll

Spielzug	Max	Punktesumme		Sophie
1	80	80	16	16
2	5	85	86	70
3	1	86	101	15
Differenz zu 99		13	2	

Tabelle 1 illustriert, dass Max und Sophie bereits in drei Spielzügen am Ende des ersten Spiels angelangt sind. Sophie hat beim Stand von 86 Punkten mit einem weissen und zwei blauen Würfeln im dritten Spielzug 15 Punkte gewürfelt. Ein Würfelauge mit dem Weissen (=10 Punkte) plus zwei und drei Punkte mit den beiden blauen Würfeln. Max hatte sein Glück in diesem Spielzug nur mit einem blauen Würfel (Einer) versucht und einen Punkt erzielt. 99 Punkte sind überschritten worden. Die Beiden berechneten danach die Differenz ihrer Punktesummen zur Zielzahl 99. Bei Max sind es 13 Punkte, bei Sophie 2 Punkte. Diese trugen sie in das Protokollblatt ein, siehe Tabelle 2.

Tabelle 2

Protokoll eines Spielblocks mit fünf Spielen

Spiel	Max	Sophie
1	13	2
2	0	21
3	16	5
4	18	0
5	7	22
Summe	54	50

Tabelle 2 illustriert einen Spielblock, innerhalb dessen fünf Spiele ausgetragen worden sind. Die Summe der Differenzen von Max beträgt 54. Sophie ist mit ihren 50 Punkten die Gewinnerin dieses Spielblocks.

Spiele und Turniere

Die Regeln und die Organisation des Würfel-Differenzlers können einfach oder komplex sein. Das Wissen und die Neugier, neue Zielzahlen zu verwenden, sind Variablen, welche die Entscheide der Gruppen beeinflussen. Die Gruppe kann zwei Spielblöcke vereinbaren. Man könnte auch ein Turnier organisieren, in dem die Sieger aus dem ersten Spielblock eine Runde weiter kommen in den Spielblock zwei. Das wird bis zum Finalblock fortgeführt werden.

Das Mathematisieren

Es ist augenfällig, dass in diesem Spiel implizit wesentliche Themen des Lehrplans der Mathematik über viele Stufen geübt, differenziert und automatisiert werden. Verschiedene Projekte und Theorien haben in den letzten Jahrzehnten bewiesen, dass diese Form des Lernens und Übens pädagogisch wertvoll und effizient ist (Oerter, 2012; Kamii, 1985, 1994, 2000, 2004; Meyer, 2006, 2007; Ramani & Siegler, 2008).

Allerdings bedarf es einiger Präzisierungen, damit die Öffnung des Unterrichts in Bahnen verläuft, welche bedeutsam, geordnet und fachlich gesichert sind. In Anlehnung an die Theorie der didaktischen Situation von Brousseau & Gibel (2005), an Brousseau, Brousseau & Warfield (2007) sowie an die Konzepte und Projekte von Kamii (1985, 1994, 2000, 2004) wird ein System skizziert, welches fachliche und pädagogische Ansprüche zu integrieren vermag.

Abbildung 5

Spiel, Mathematik und Situation

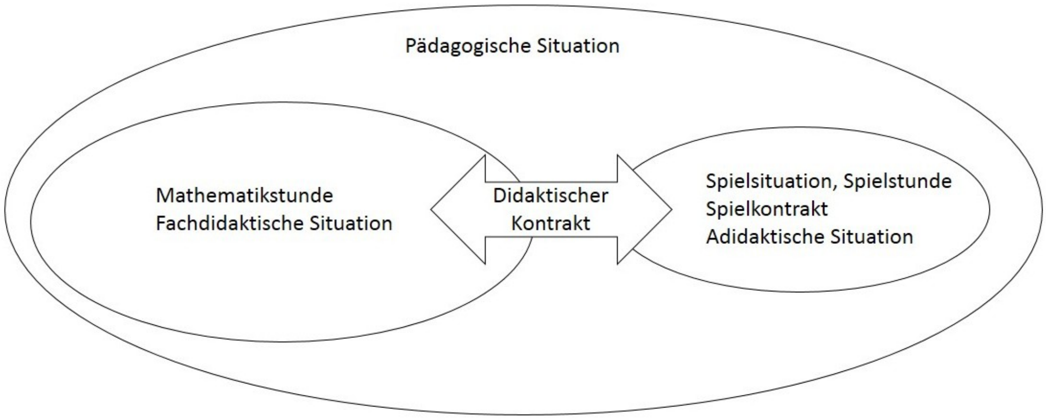

Abbildung 5 bringt zum Ausdruck, dass Unterricht eine integrale pädagogische Situation ist. Die Klasse organisiert Spielsituationen, welche über Spielkontrakte (Spielpädagogik) geregelt werden. Dazu gehören alle Situationen, welche die Lehrperson den Lernenden überantwortet (=adidaktische Situation). Die Brücke zum Mathematikunterricht wird nach Brousseau et al. (2007) durch den didaktischen Kontrakt hergestellt. Dabei widmen sich die Klasse und die Lehrperson den Aufgaben, welche zur expliziten mathematischen Bildung gehören. Nach Klafki (1996) ist dies ein Prozess der interaktiven didaktischen Analyse.

Die Integration von Spielerfahrungen und anderen sogenannten adidaktischen Situationen bedeutet eine radikale Ausrichtung auf die Ressourcen und Erfahrungen der Lernenden. In Unterrichtsprojekten von Studierenden der HfH konnte zudem bestätigt werden, dass besonders Kinder und Jugendliche mit Lern- und Verhaltensschwierigkeiten positiv auf die geöffneten und ressourcenorientierten pädagogischen Situationen reagierten.

Neben den impliziten Übungs- und Automatisierungsaspekten sind die Spielerfahrungen eine ergiebige Grundlage für explizite mathematische Tätigkeiten (vgl. Lehrplan 21). Der didaktische Kontrakt sowie die didaktische Analyse als Prozess garantieren, dass der eigentliche Mathematikunterricht zum Zuge kommt. Die Motivation für bedeutsames Lernen und Wissen aus der Perspektive der Kinder ist zentral. Die Erfahrungen und die unwillkürlichen Erinnerungen der Kinder generieren geschlossene und offene Aufgaben oder Probleme. Die Beobachtungen der Lehrpersonen während der Spielsituationen sichern sowohl spielpädagogische Fragen als auch fachliche Belange ab. Dies geschieht dadurch, dass Beobachtungen über geniale und problematische (arithmetische) Handlungen in der Klasse thematisiert werden. Das mathematische Handeln ist im persönlichen und sozialen Erkenntnisinteresse verwurzelt (Weil, 1950; Le Bohec, 1997; Imola, 2010; Gruschka, 2011).

Einige Fragen für dynamisches Mathematisieren:

- Wie könnte man den Streit über die Richtigkeit einer Addition klären? A hat behauptet, dass die Zwischensumme plus der neue Wurf so und so viel gibt. B. widerspricht ihm.

- Was passiert, wenn zwei Spieler während eines Spielblocks dauernd die Zielzahl wechseln? Hat das Auswirkungen auf die Bestimmung des Siegers?

- Welches Spielerduo hat zusammen die kleinste Differenz gewürfelt? Und warum?

- Wer hatte im ersten Spielblock die kleinste Differenz, die Buben oder die Mädchen?

- Hat der Sieger im Finalblock auch die kleinste Differenz über alle Spielblöcke zusammengezählt oder etwa nicht?

- Wie gross sind die Mittelwerte der Würfe in einem Spiel, in einem Spielblock, in einem Turnier?

- Was hat die Gewinner und Gewinnerinnen so erfolgreich gemacht? Waren es viele Würfe mit wenig Würfeln, oder führten Würfe mit allen Würfeln eher zum Sieg?

usf.

Die Integration der Spielerfahrungen verwirklicht auf autonome und kreative Weise verschiedene Handlungsaspekte des Mathematikunterrichts: darstellen, kommunizieren, argumentieren, begründen, berechnen (schriftlich, im Kopf), interpretieren, reflektieren und auch das Erforschen. Die Wahl der Handlungen ist abhängig von der Fragestellung und von den Aufgaben.

Literatur

Adey, P., Shayer, M. (1994). *Really Raising Standards: Cognitive Intervention and Academic Achievement*. London: Routledge Chapman & Hall.

Adey, P. (2004). Accelerating the development of general cognitive processing. In A. Demetriou, Raftopoulos, A. (Hrsg.), *Cognitive Developmental Change* (S. 296-317). Cambridge: Cambridge University Press.

Adey, P. (Hrsg.). (2008). *Let's Think! Handbook. A Guide to Cognitive Acceleration in the Primary School*. London: GL assessment.

Bringuier, J. C. (2004). *Jean Piaget - Ein Selbstportrait in Gesprächen*. Weinheim: Beltz.

Brousseau, G., Gibel, P. (2005). Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 13-58.

Brousseau, G., Brousseau, N., Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum Part 2: From rationals to decimals. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(4), 281-300.

Egg, G. (1989). *Puur Näll As* (6. Aufl.). Neuhausen am Rheinfall: AGM AGMüller.

Gruschka, A. (2011). *Verstehen lehren. Ein Plädoyer für guten Unterricht*. Stuttgart: Philipp Reclam.

Imola, A. (2010). *Empathie und verstehen. Die Methode von Nicola Cuomo.* Verfügbar unter: http://rivistaemozione.scedu.unibo.it [18.03.2012]

Kamii, C. (1985). *Young Children Reinvent Arithmetic*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (1994). *Young children continue to reinvent arithmetic. 3rd Grade*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (2000). *Number in preschool & kindergarten* (8th Printing). Washington: National Association for the Education of Young Children.

Kamii, C. (2004). *Young Children Continue To Reinvent Arithmetic. 2nd Grade* (2nd ed). New York: Teachers College Press.

Klafki, W. (1996). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Zeitgemässe Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik* (5. Auflage). Basel: Beltz Verlag.

Le Bohec, P. (1997). *Verstehen heisst Wiedererfinden. Natürliche Methode und Mathematik* (2. Aufl.). Bremen: Pädagogik-Kooperative e.V.

Meyer, S. (2006). *Das flexible Interview.* Verfügbar unter: http://public.bscw-hfh.ch/d_1/FI_www/ [10.10.2009]

Meyer, S. (2007). *Kommt, wir jassen und mathematisieren* (S. 95): Hochschule für Heilpädagogik, Zürich.

Oerter, R. (2012). Lernen en passant: Wie und warum Kinder spielend lernen. *Diskurs Kindheits- und Jugendforschung*(4), 389-403.

Padberg, F. (2007). *Didaktik der Arithmetik* (3., erw. u. vollst. aktual. Neuauflage). Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Piaget, J., et collaborateurs. (1977). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. 1. L'abstraction des relations logico-arithmétiques.* (Bd. 1). Paris: Presses universitaires de France.

Piaget, J., et collaborateurs. (1977). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. 2. L'abstraction de l'ordre des relations spatiales* (Bd. 2). Paris: Presses universitaires de France.

Piaget, J. (1983). *Das moralische Urteil beim Kinde* (2., veränderte Aufl.). Stuttgart: Klett-Cotta.

Ramani, G. B., Siegler, R.S. (2008). Promoting Broad and Stable Improvements in Low-Income Children's Numerical Knowledge Through Playing Number Board Games. *Child Development, 79*(2), 375-394.

Weil, S. (1950). *L'enracinement. Prélude à une déclaration des devoirs envers l'être humain.* Paris: Editions Gallimard.

Wygotski, L. S. (1986). *Denken und Sprechen*. Frankfurt a.M.: Fischer.