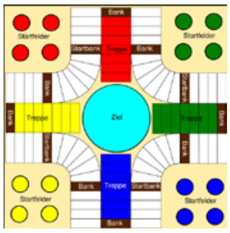
HfH Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik



Eile mit Weile

Förderung mathematischer Kompetenzen – Essay und Projektskizze

Stefan Meyer, Dozent HfH

Zürich, 26.07.2011;

7. Überarbeitete Version, Juni 2019

Mail stefan.meyer@hfh.ch

HfH Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik

Inhalt

1 Einleitung

Die Entwicklung des Ordnens, des Zählens (auch des strukturierten Zählens), des Zuordnens und des Operierens lässt sich mit dem Phänomen „Eile mit Weile" nahezu perfekt aufbauen und nachverfolgen. Diese Fertigkeiten lassen sich auch umfassend und wirkungsvoll fördern. Die hier erörterte Entwicklung betrifft nicht nur den Kindergarten, sie enthält auch Bezüge zu anspruchsvolleren mathematischen Inhalten (Terme, Gesetze, Mathematisierung, forschendes Lernen, RME nach Freudenthal (1977, 1991)).

Bevor die Darlegung beginnt, soll zur Vorsicht gemahnt werden. „Eile mit Weile" ist kein Allerweltsmittel, mit dem man die Kinder wie von selbst zur Arithmetik führen kann. Das möchte es auch nicht sein. Das Spiel untersteht genauso der Frage nach der Bedeutsamkeit wie alles andere in der Pädagogik. Sonst läuft man Gefahr, dass man die Dominanz *einer* Darstellungsform (konventionelle didaktische Hilfsmittel, festgelegte Spiele usf.) mit dem Primat der subjektiven Anschauung verwechselt. Mit dem Primat der Anschauung ist das gemeint, was das Subjekt einsieht und was es sichtbar machen kann. Das ist das Gegenteil von dem, was man gewöhnlich durch Lehren in seine Auffassung hineinprojizieren möchte. Interessant und pädagogisch-psychologisch herausfordernd sind Kinder, die (noch) nicht spielen möchten. Sie wissen gewöhnlich keine Antwort auf die Frage nach dem Grund der Zurückhaltung oder der Verweigerung. Spiele sind in den Augen dieser Kinder nicht automatisch schön, sondern u.U. etwas Bedrohliches. In solchen Fällen ist es notwendig, dass man die subjektive Spielwelt des Kindes erforscht und seine Spiele in den Unterricht integriert.

Diese Skizze möchte zu Entwicklungsarbeiten (Leistungsnachweisen, Praxisprojekten, Masterarbeiten) und zu andern Praxiserfahrungen (Therapie, Förderangebote, Denkschulung, Spielpädagogik, Intervision, Supervision) einladen. Jede Idee und jede Erfahrung aus der Praxis ist willkommen. Für Hinweise und Beratungen stehe ich gern zur Verfügung (stefan.meyer@hfh.ch).

Ich möchte Barbara Affolter, Regula Gisler, Nadine Kolb, Franziska Roth, Nicole Schmid, Simone Späth, Simon Hänggi und Eva Schönenberger-Wyder für die Beispiele und die Gespräche danken. Ihr Wirken im Unterricht inspiriert zur Kreativität und es bereichert die Pädagogik.

2 Problemstellung

Moser Opitz (2001; 2007) und viele andere Autoren (z.B. Schipper, 2005) erörtern die Problematik des zählenden Rechnens. Kinder mit Lernschwierigkeiten verharren viel zu lange in diesem Handlungsschema, sie können kaum höhere arithmetische Kompetenzen aufbauen und bleiben abhängig von diversen Arbeitsmitteln und didaktischen Ritualen. Aus der Grundlagen- und Entwicklungsforschung liegen eine Vielzahl von differenzierten Untersuchungsmethoden und Ergebnissen vor (Gerster und Schulz, 2000). Diese zeigen, dass jede arithmetische Handlung von einem komplexen Netzwerk von Fähigkeiten und Fertigkeiten getragen wird, wie es im Eisbergmodell bildhaft ausgedrückt wird. Nun stellt sich die Frage, ob man aus diesen Grundlagenforschungen heraus gleich Trainingsprogramme und Aufgaben sowie Methoden für die Förderung ableiten kann. Diese Fördermassnahmen wollen einzelne defizitäre Funktionen optimieren. Man trifft in der Praxis sehr differenzierte Förderwerkstätten an, welche Übungen zu den zuvor analysierten Defiziten enthalten (Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser Opitz & Wittich, 2013). Dies geschieht in der Annahme, dass die Summe dieser Übungen die Optimierung des ganzen Kompetenzdefizites bewirken würde. Man kann feststellen, dass dieser Annahme der Mut zur Lücke, sprich der Mut zur ganzheitlichen Auseinandersetzung fehlt. Ich nenne dies den variablenpsychologischen und den damit verbundenen funktionalistischen Fehlschluss. Die Ganzheit der Kompetenzen einer Person ist doch immer mehr als die Summe der Teile! Schlee nennt es den förderdiagnostischen Fehlschluss.

Heilpädagogik benötigt dementsprechend Fachpersonen, welche die Logik der variablenpsychologischen und der funktionalistischen Fehlschlüsse erkennen können (Holzkamp, 1985). Schauen wir dazu ein eindrückliches Fallbeispiel an. Etliche Bekannte und Kolleginnen haben mir berichtet, dass sie als Mädchen Mühe hatten, die analytischen Ausführungen zum Zehnersystem mit den damit verbundenen Bündelungsübungen zu verstehen. Gleichzeitig hatten sie mit dem Ball das sogenannte „Zehnerle“ gespielt. Damit hätten sie die Einsicht ins Zehnersystem und in den Hunderterraum aufbauen und üben können. Die fachdidaktischen Funktionsübungen hatten den Charakter einer Fremdsprache.

In die ähnliche, jetzt aber fachdidaktische Richtung weist der Begriff des aufgabendidaktischen Fehlschlusses. Bei ihm wird angenommen, dass die Summe der bereitgestellten und differenzierten Aufgaben die Einsicht in ein Thema vervollständigen könne (Lenné, 1969). Heilpädagogik würde demnach bedeuten, dass man die bereitstehende Menge der Aufgaben einfach differenzieren und individualisieren müsse, um die Bildungsziele zu erreichen. Die Heilpädagogik lässt dabei ausser Acht, dass sie sich im Kreis der Logik der Aufgabendidaktik dreht. Sie perfektioniert, wenn es gut kommt, die Didaktisierung (Gruschka, 2011) ohne Sensibilität für Erziehung.

Die geneigte Leserin und der geneigte Praktiker stehen in einem Dilemma. Worauf sollen sie sich bei der Grundlagenforschung verlassen und worauf sollen sie sich fachdidaktisch verlassen? Dieses Dilemma kommt auch in der Fachliteratur vor. In der Studie von Moser Opitz (2001) wird eindrücklich auf die Diskrepanz zwischen den guten Kenntnissen von Würfelbildern und den Schwierigkeiten im Umgang mit Punktefeldern hingewiesen. Diese erscheinen wie ein neues Alphabet. - Die Diskrepanzen auf der einen Seite und die Annahme auf der andern, dass strukturierte Mengenbilder das strukturierte Zählen fördern, regten das Erkenntnisinteresse an diesem Unterrichtsprojekt an. (Bestimmt gibt es weitere Annahmen, die man erforschen müsste.) Ein Unterrichtsprojekt ist dazu da, dass man die Erfahrung befragen kann. Das würde für unsere Beispiele verallgemeinert heissen, dass man bedeutsame Phänomene auswählen kann und auswählen soll, um die mathematische Kompetenz zu fördern. So würde man mit Schülerinnen und Schülern vereinbaren, dass das „Zehnerle“ als Unterrichtsthema integriert wird.

Den Spielen werden in der Literatur verschiedene Funktionen zugeschrieben. Oerter (2012) portraitierte das Spielen als Lernen „en passant“. Die diagnostische Funktion kennt man etwa von Baroody und Gannon‘s „Carrace“ (Baroody & Gannon, 1983, zitiert nach Ginsburg, 1987, S. 471f.), Müller und Wittmann’s (1990) „Räuber und Goldschatz“ oder Moser Opitz‘ (2001; 2007) „Goldstückspiel“. Textor (2000) betont, dass das Spielen einen ko-konstruktiver Bildungsansatz darstellt, der nach Wygotski über die Sprache die Zone der nächsten Entwicklung in die Wechselwirkung bringt (vgl. Wygotski, 1986). Ausgehend von Heimlich (2015) soll das Spiel in diesem Essay ökologisch verstanden werden. Theoretisch bedeutet, dass

> (…) die räumlichen Aspekte kindlicher Spieltätigkeit besonders betont werden. Zumindest liegt in dieser topologischen Orientierung, in der Frage nach dem „Wo?" des kindlichen Spiels, nach seinen sozialräumlichen Bedingungen bisher der perspektivenerweiternde Beitrag ökologischer Spieltheorien für Spielforschung und spielpädagogische Praxis. (ebd., S. 77)

Die systemische Erweiterung der Theorie betrifft *alle Wechselwirkungen im Sinne der ICF*, mit besonderem Fokus auf die *Wechselwirkungen zwischen der aussermathematischen und der innermathematischen Beziehungshaltigkeit* (vgl. Freudenthal, 1977).

Die Spiele sind unterschiedlich ausgestattet. Bei einigen sind z.B. die Spielfelder nummeriert (Leiterspiel, Räuber und Goldschatz, Goldstückspiel), bei andern sind sie leer, wie zum Beispiel beim Eile mit Weile.

Viele Praxisprojekte schildern die Wirksamkeit von Gesellschaftsspielen für den Aufbau und den Erwerb des sicheren, eleganten und strukturierten Zählens. Ebenso wächst die Gewandtheit mit den Grundoperationen, wie Kamii (1985, 2004), Siegler & Ramani (2009) belegen konnten. Kolb (2008) konnte in einem Unterrichtsprojekt (HfH) die positiven Wirkungen von Spielen auf der Unterstufe bestätigen.

3 Die Potenziale des Eile mit Weile für die Mathematik

Das Brettspiel kann etwas Bedeutsames sein und es ist mathematikdidaktisch betrachtet ein wertvoller Forschungs- und Übungsgegenstand. Das Pädagogische bildet die Grundmenge. Teilmengen davon sind die Entwicklungsdiagnostik und die Förderung und Übung des arithmetischen Denkens und Handelns, die Metakommunikation und die Metakognition. Damit diese Werte zum Tragen kommen, muss unterschieden werden zwischen dem Spielen und dem Mathematisieren (vgl. den Reader „Kommt, wir jassen und mathematisieren", Meyer, 2007).

Mit der Methode des flexiblen Interviews kann während oder vor und nach den Spielen beobachtet und erforscht werden, wie die Kinder das Spiel handhaben und was sie davon verstanden haben.

Der Mathematikunterricht ermöglicht die fortschreitende Abstraktion in Richtung der Arithmetik auf der Basis des Lernens aus Erfahrung. Die Arithmetik ist gewissermassen das abstrakte Sprachspiel über die Erfahrungen, die Regeln und die Strukturen des Spiels. Das bedeutet, dass das Spiel nicht einfach eine Analogie oder ein Abbild ist, sondern Darstellung gewisser mathematischer Objekte und deren Bedeutung!

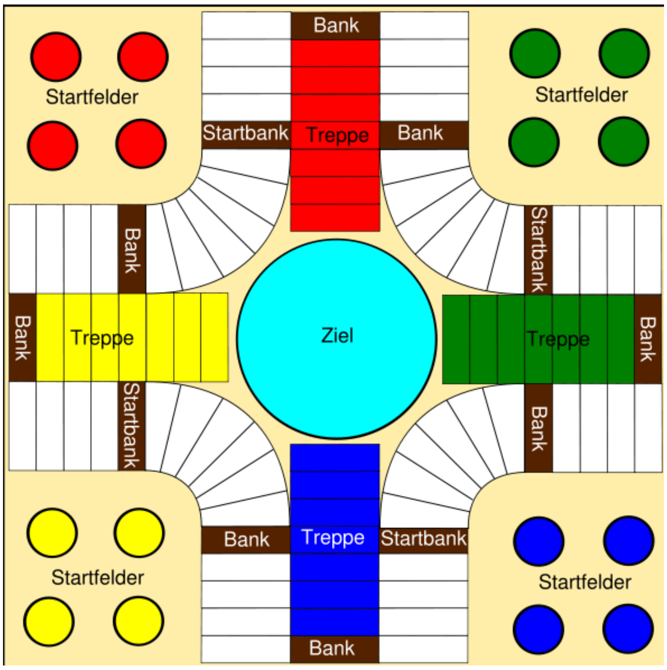


Abbildung 1: Spielbrett Eile mit Weile Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Eile_mit_Weile

Abbildung 1 illustriert die Struktur des Spiels. Die Spielregeln sind in z.B. Wikipedia allgemein beschrieben worden. Sie werden hier nicht thematisiert.

Die regelmässige Pflege einer Spielkultur allein bringt noch keine besseren Mathematiker hervor. Die Spielkultur erweitert und festigt soziale, kognitive und emotionale Inhalte. Die mathematische Kompetenz baut auf diesen Erfahrungsschatz auf. Die mathematischen Kompetenzen und die Sprache der Mathematik ermöglichen eine abstraktere Anschauung, Wieder-Erfindung und Einsicht in das Geschehen und die Bedeutung der Spiele. Das Spiel wird in der Sprache der Mathematik rekonstruiert (Zahlen, Operationen, Rechengesetze).

Es sei wiederholt, dass das mathematische Tun sich nicht auf ein möglichst realitätsnahes Abbilden von Geschehnissen des Spiels beschränken darf. Vielmehr soll den Kindern im Unterricht der Weg zu Spekulationen zugänglich sein. Im Zentrum steht die Frage: *„Was wäre, wenn…?“* Selbst gewählte Konjunktive würden die Brücke zum arithmetischen Spiel der Gedanken bilden. Sie wären der kommunikative Auftakt zum Sachrechnen und zum experimentellen, forschenden Lernen, inklusive der Gedankenexperimente, welche man durch empirische Untersuchungen und Rekonstruktionen am Spielbrett verifizieren könnte.

Die befreiende Pädagogik im Sinne von Paulo Freire (1979) hätte eine *empirische* Entsprechung gefunden durch die Praxis eines befreienden und transformierenden Mathematikunterrichts (vgl. Wink, 2011).

3.1 Erinnerungen und Erfahrungen

Eigenartigerweise waren es nicht bewusste Kindheitserinnerungen, die mich zum Abfassen dieser Skizze angespornt haben. Es war eher die widersprüchliche Situation der Forschungsresultate im Bereich des zählenden Rechnens, des Umgangs mit strukturierten Zahlenmengen sowie der breiten Diskussion um das Fingerrechnen und die Darstellungsformen, kurz die allgegenwärtigen

Tendenzen zur Didaktisierung auch in der Heilpädagogik (Gruschka, 2011). Mannoni (1978) umschrieb Didaktisierung als ein Verfallen-Sein in Methoden, „die letzten Endes jede Arbeit blockieren würden“ (ebd., S. 99).

In Gesprächen und Briefwechseln verstärkte sich die Einsicht, dass biographische Quellen auch Teil der Empirie sind, nämlich der subjektiven. Ausschlag gab eine Briefzeile von Franziska Roth, SHP (28.01.2011): „Himmel, wie konnte ich mein liebstes Spiel vergessen! Wie oft rechnete ich aus, was ich machen muss, damit mein Papa wieder “heim” musste!“

Diese Erinnerung hatte bei mir eine Türe zur eigenen Kindheit geöffnet:

Unsere Mutter führte uns an Sonntagnachmittagen in verschiedene Gesellschaftsspiele ein, auch in das Eile mit Weile. Vor dem Spiel wurden die Regeln erläutert und angeeignet, damit das Spiel funktionierte. Der Spielstart erfolgt mit dem Würfelbild fünf, auf das jeder sehnlichst wartete. Man stellte die Figur auf die Startbank und folgte den Fingerzeigen des Schicksals. Das Würfelbild sechs erschien zunächst wie ein Füllhorn, jetzt durfte man zwölf Felder fahren, unter Umständen nochmals zwölf und noch etwas Kleineres dazu. Drei Mal zwölf bedeutete für einen Moment lang die totale Niederlage. Mit der Zeit löste ich mich vom zählenden Vorwärtsfahren. Ich wusste um die Anzahl der Distanzen zwischen den Bänken. Zuvor hatte ich meine Mutter bestaunt, wie sie laut denkend und elegant von einer Bank zur andern hüpfte, die Gesamtzahl der gewürfelten Punkte mit einem Blick auf die Differenz zur nächsten Bank unterteilte und die Restbeträge einzeln oder als Teilmenge hüpfte oder auf andere Figuren verteilte.

In diesem Essay ist zu wenig Platz, um die Tragweite dieser Erinnerungen zugunsten des Themas des Spielens und Mathematisierens ordentlich zu analysieren. Das Wechselspiel von Erinnern und Vergessen verdient auf jeden Fall mehr Aufmerksamkeit. Dadurch kann das heilpädagogische Repertoire bereichert werden. Freud (1993) erörterte es wie folgt:

> Ich meine, wir nehmen die Tatsache der infantilen Amnesie, des Ausfalls der Erinnerungen für die ersten Jahre unseres Lebens viel zu gleichmütig hin und versäumen es, ein seltsames Rätsel in ihr zu finden. Wir vergessen, welch hoher intellektueller Leistungen und wie komplizierter Gefühlsregungen ein Kind von etwa vier Jahren fähig ist, und sollten uns geradezu verwundern, dass das Gedächtnis späterer Jahre von diesen seelischen Vorgängen in der Regel so wenig bewahrt hat, zumal da wir allen Grund zur Annahme haben, dass diese selben vergessenen Kindheitsleistungen nicht etwa spurlos an der Entwicklung der Person abgeglitten sind, sondern einen für alle späteren Zeiten bestimmenden Einfluss ausgeübt haben. Und trotz dieser unvergleichlichen Wirksamkeit sind sie vergessen worden! (ebd., S. 45-46)

Ich füge einige hypothetische Schlüsselbegriffe in diesen pädagogisch-mathematischen Themenbereich ein. Unter Verwendung der Psychoanalyse als Erkenntnisquelle wird deutlich, dass die Tiefendimensionen des Spielens weiterreichen: Triangulierung, ödipale Phase, Einüben von Kompromissen (Wechselspiel zwischen Primär- und Sekundärprozessen), das Spiel als sublimierte Erfüllung elementarer Wünsche (Liebe, Aggression, Angst, Autoritarismus), Leistungsfähigkeit des Ich, Wiederholung des Spiels als Chance, nicht als Zwang (Brenner, 1993; 1999). Ebenso müssten Schlüsselbegriffe für die Sozioanalyse der spielenden und mathematisierenden Gruppe beachtet werden (Pichon-Rivière, 2003).

Aber, das Spiel darf nicht idealisiert oder gar romantisiert werden. Hinter jeder positiven Erfahrung stecken in der Regel auch Schatten, welche an Langeweile, Verhöhnung und Fremdbestimmung erinnern (vgl. Hirblinger, 2011).

Spielen in pädagogischen Institutionen ist trotz der Methodenfreiheit in der Volksschule ein ambivalentes Thema, wie die folgenden Gedanken der Heilpädagogin, Barbara Affolter, zeigen.

> Ich mache an der Oberstufe oft die Beobachtung, dass basale Grundoperationen bei schwachen SchülerInnen nicht wirklich sitzen und die Abstraktion, die z.B. beim Bruchrechnen, wenn man die handelnde Ebene verlässt, trotz supergutem Lehrmittel ("Zahlenbuch" oder "mathbu.ch") beinahe unmöglich erscheinen. Ich greife dann oft in Kombination mit dem Klassenlehrmittel auf spielerische Elemente zurück, wie einfache Jass- oder Brettspiele, um zu sehen, wo ich nochmals etwas vertiefen oder auffrischen kann. Vor allem aber, dass ich das Spielerische und Leichte beibehalten kann. Diese spielerischen Elemente beim Gemeinschaftsspiel, lösen in meinen Augen viele (nicht alle) Blockaden und was mich noch fast wichtiger dünkt, es kehren Freude oder zumindest eine wohlwollende Haltung gegenüber der Mathe zurück. Gute Voraussetzungen, um zu lernen... (Brief 15.03.2011)
>
> Ich möchte hier aber noch anfügen, dass das Spiel zur Festigung von elementaren Fertigkeiten speziell auf der Oberstufe grosses Vertrauen und eine gute Beziehung zwischen LP, SHP und Sch. voraussetzt.
> Das Fachwissen bildet selbstverständlich die Grundlage und die Erfahrung eine nicht zu unterschätzende Komponente. Manchmal braucht es auch etwas Mut, Weitsicht und Überzeugungsarbeit, um bei den Eltern spielerische Zugänge zu rechtfertigen.
> (Brief 21.03.2011)

Andererseits lässt die Tatsache aufhorchen, dass 2/3 der Kinder einer ersten Primarklasse noch nie Gesellschaftsspiele kennen gelernt haben (Simone Späth, SHP, mündliche Mitteilung, 24.05.2013). Nach Oerter (2012) ist das implizite Lernen oder das Lernen „en passant“, wie er es nennt, etwas Reichhaltiges. Aber es ist kein deus ex machina, es ist kein Automat, sondern es erfordert Aufmerksamkeit und fortschreitende Differenzierung in erster Linie bei den Pädagoginnen und Pädagogen selbst. Erfahrungen mit Unterrichtsprojekten erwiesen sich als hervorragende Entwicklungshelfer, wenn sie mit Hilfe systemischer didaktischer Analysen durchdacht worden sind.

3.2 Elemente der Spielstunden

Mit Blick auf Spielstunden in der Familie, in der Kinderkrippe, im Kindergarten oder in der Schule geht es aus *spielpädagogischen* Gründen erst einmal darum, dass sich Kinder für Spiele zusammenfinden und dass sie die Spiele kennen lernen können, für die sie sich interessieren. Es kann gezeigt werden, dass es im Spielverhalten und in der Kommunikation über das Spiel Entwicklungslinien gibt, die wir kurz erörtern. Zentral ist die Triangulierung: in der Familie durch Eltern-Spiel-Kind; in der Schule - Pädagogin-Spiel-Kind; sei es in einem therapeutischen Setting: Therapeut-Spiel-Klient.

Während der Spiele geben sich die Kinder Tipps oder sie erhalten sie von der Pädagogin oder dem Pädagogen, der sie betreut. Diese Tipps bestehen vor allem aus Informationen über die Regeln und dem Wortschatz des Spiels. Reflexionen über die Spielzüge und Regeln sind informell und prozessbegleitend. Jeder ist froh, wenn das Spiel funktioniert. Reflexionen über „Tricks“ und Strukturen interessieren die Kinder noch nicht (siehe Tabelle 1, unten).

Etwas systematischer geht es zu und her, wenn man z.B. im Kreisgespräch eine einzelne Spielsituation genauer erörtert. Jetzt lernen die Kinder, ihre Zählstrategie und ihre Tricks (das strukturierte Zählen und Operieren) andern mitzuteilen, zu begründen und zu beweisen, wenn es z.B. widersprüchliche Annahmen gibt. In diesen *alltagssprachlich* geprägten Gesprächsrunden erweitern sich die Kommunikation und das Bewusstsein über das Spiel. Das Darstellungsmittel ist immer noch das Spiel selbst. Die Wechselwirkungen bewegen sich zwischen den Gedanken und dem Spielbrett und den Figuren. Der Fokus liegt auf der Entwicklung der Kompetenz der Spielenden.

3.3 Kinder mit Verhaltensschwierigkeiten geschickt integrieren

Kinder mit Verhaltensschwierigkeiten, oder Kinder, welche behaupten, es würde gemogelt, sobald sie sich auf der Verliererstrasse sehen, wären im Licht dieser Methode paradoxerweise wertvolle „Problemsteller“. Natürlich muss man diese Kinder und die Gruppen mittels Spiel- und Verhaltensregeln führen, unterstützen und beruhigen. Auf der anderen Seite könnten die Gefühle dieser Kinder ernst genommen und übersetzt werden in wertvolle Hypothesen über einen Spielverlauf, welcher in der Mathematikstunde untersucht würde. Die Gefühle und kognitiven Konflikte dieser Kinder würden mit der Mathematik trianguliert und bearbeitet. Es wäre gleichzeitig ein verhaltenspädagogischer und ein mathematikdidaktischer Kunstgriff.

Der zweite Teil der Inhaltsanalyse besteht in der Befragung und Beobachtung der Kinder. Dabei haben sich flexible Interviews sehr bewährt. In diesem Prozess können auch die Bedeutsamkeit des Spiels und die Entwicklung des Denkens der Kinder bestimmt werden. Während dieser Abklärungen kann man ein Poster herstellen oder wie gesagt eine Gedankenkarte.

Mögliche, grob gerasterte Bereiche der Gedankenkarte sind: das Regelbewusstsein der Kinder, die Handlungsmöglichkeiten und die Grenzen der Handlungsfähigkeit, die Zählstrategien, die fortschreitende Rationalisierungen des Zählens, die Differenzierung der Zahlbegriffe, die Strukturierung der gewürfelten Zahlen als Teil der Spieltaktik, die differenzierte Zuteilung der Punkte zu den einzelnen Spielfiguren (Distributivgesetz), die fortschreitenden Abstraktionen der arithmetischen Sichtweisen, Korrespondenztheorie, Morphismustheorie: intra-, inter-, transmorphisch (Piaget et al.,1990), kreativerer Umgang mit konjunktivischen Fragen: „Was wäre, wenn…?“ inkl. Methodischer Lösungsmöglichkeiten, das zuletzt Genannte unterstreicht die Bedeutung der Sprache im gesamten Prozess und Projekt.

3.4 Elemente der Mathematikstunden

Wir haben erörtert, dass das Spielen wirklich Spielen sein soll. Eine weitere und völlig verschiedene Etappe der abstrahierenden Reflexion wird dann erreicht, wenn die Kinder Spielzüge und Situationen mit Hilfe der Zahlen- und Operationssymbole erläutern und immer komplexere Sachverhalte differenzieren können. Jetzt liegt der Fokus auf der Entwicklung der mathematischen Kompetenzen.

Die Lehrperson leitet die Lernenden in Projektstunden, in Forscherstunden oder in mathematischen Kolloquien an, die Spielerfahrungen als mathematische Objekte wiederzuentdecken (Freudenthal, 1991). Die Kinder sind herausgefordert, die Korrespondenz zwischen dem Spielbrett, den Figuren und den Handlungen abzubilden und auf die Beziehungen zwischen den Zahlsymbolen und den Operationszeichen zu übersetzen. Die Wechselwirkung wird stetig formalisiert und bis zu den regulären Notationen entwickelt. Die Arithmetisierung ist soweit fortgeschritten, dass die Kinder aus der Arithmetik heraus Forschungsfragen und Sachfragen entwickeln, am Modell überprüfen und arithmetisch beschreiben können (siehe den Abschnitt „Eile mit Weile mathematisieren“).

Es ist deutlich geworden, dass man zwischen der Spielpädagogik und der Mathematisierung streng unterscheiden soll. Dies steht im Gegensatz zu Empfehlungen, in denen das Lernen „mit allen Sinnen“ betrieben werden soll. Das geschieht grob umrissen, wenn die Lehrperson das Spielbrett mit Zahlen beschriften würde, die Kinder kurz spielen lassen würde, um danach mit einer Fülle von Arbeitsblättern Rechenübungen zu bestücken. Spiel und Mathematik wird rasher zur Konfusion, als einem lieb ist. Aus diesem Grund wird in dieser Skizze empfohlen, sowohl den Sinn für die Spielpädagogik als auch den Sinn für das Mathematisieren zu entwickeln, beides zu seiner Zeit.

4 Die Analyse des Spiels mit Blick auf den Mathematikunterricht

Grob umrissen, siehe Gedankenkarte im Anhang.

Die Sachanalyse und v.a. die didaktische Analyse sollen eine doppelte sein. Sie kann mit der Selbstbefragung, Selbstbeobachtung, mit einer Spielrunde sowie mit der Literaturrecherche der Lehrperson(en) beginnen. Dabei entstehen Gedankenkarten, wie sie im Anhang angefügt sind. Im Sinne eines Gedankenexperiments soll man zweitens die möglichen Konflikte im Spiel sowie arithmetische Operationen am Spielbrett ausloten. Dabei soll man vom Bewusstsein getragen sein, dass das Gedankenexperiment nur eine Vorübung auf die praktischen Erfahrungen ist.

Im Kern geht es um die Einsicht und die Darstellung des *mathematischen «Betriebssystems»* und der Strukturen des Spiels und während des Spiels (Prozesse, Operationen, Rechengesetze). Das Produkt der Analyse wird mit dem *Lehrplan* abgeglichen und mit den Lehrmitteln vernetzt.

4.1 Das Zählen und Operieren während des Spiels

Das Zählen und Operieren während des Spiels erfährt eine Entwicklung, vom einschrittigen und kurzsichtigen Verhalten hin zu elaborierten und strukturierten Zählstrategien und Operationen. Diese Entwicklungen geschehen nicht von selbst, sie sind abhängig von der kognitiven Entwicklung der SuS und von den realen Entwicklungsmöglichkeiten in der Familie, mit den Peers und im Kindergarten bzw. der Schule.

Tabelle 1

Beobachtungen bezüglich des Zählens und der Bedeutung des Gezählten

Zählhandlungen am Würfel		**Zählhandlungen auf dem Spielbrett**
Zählen der Würfelaugen in Einerschritten	**Korrespondenz**	Zählen der Spielfelder in Einerschritten
Teilweise simultanes Erfassen der Würfelaugen		Teilmengen von Spielfeldern werden strukturiert erfasst, Restmengen werden einzeln abgezählt.
Simultanes Erfassen der Würfelaugen		Mengen, z.B. Dreier-, Fünferblock oder Siebenerblock werden simultan erfasst und auf Anhieb gehüpft oder gefahren.
Simultanes Erfassen der Würfelaugen und Vervielfachung der Punktemenge nach festgelegten Regeln.		Mengen werden simultan erfasst und vervielfacht. Z.B. Fünf Augen bedeuten fünftausend, gemäss der Regel 1 Punkt stellt die Zahl 1 000 dar. Die Regel wird nicht nur bei der Interpretation des Wurfes angewendet, sondern auch bei der Orientierung auf dem Spielfeld. So bedeutet z.B. die erste Spielbank «5 000» (vgl. Abbildung 8)
Die Entdeckung und Assimilation der Reversibilität: Das Eile mit Weile rückwärts spielen, d.h. alle starten im Himmel und ziehen nach Hause in den Startraum. (Idee einer Studentin des Wahlmoduls 134, 2019)		Reversibilität der Spielregeln, Gleichheit der Anzahl der Spielfelder, vom Startraum zum Himmel und umgekehrt.

Tabelle 1 zeigt, dass das Zählen und das Operieren während des Spiels in erster Linie dem Spiel und der Spielkompetenz dienen. Wenn Kinder interessiert sind, zeigen sie einander Zählstrategien, Tricks usf. Das Spiel soll zügig verlaufen. Belehrungen oder gar Hinweise auf die Arithmetik sind zu unterlassen. Es soll nicht dazu kommen, dass die Kinder wegen der Belehrungen der Lehrperson die Lust am Spiel verlieren.

Weiter macht die Tabelle deutlich, dass die Kinder eine Korrespondenz aufbauen müssen zwischen dem Würfel und dem Spielbrett. Die Sicherheit im Verständnis der Regeln, der Zählhandlungen, der Mengenbegriffe und der Operationen durchläuft Entwicklungen, welche auch die Sicherheit im Verknüpfen der verschiedenen Komponenten des Spiels betrifft.

Wenn die elementaren Spielregeln und Orientierungen auf dem Spielfeld gesichert sind, können die SuS neue Regeln einführen, z.B. der Verzehnfachung der Würfelaugen und der Spielfelder. Diese neuen Spielregeln integrieren das wachsende *mündliche Zahlenwissen*, die entsprechenden Zählkompetenzen sowie die Zahlkonzepte (vgl. Wiese, 1996; Wiese, 2004; Wiese & Wiese, 1998)

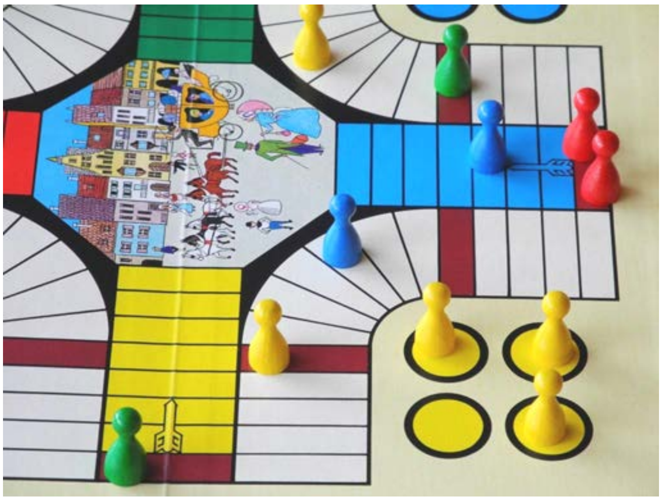


Abbildung 2: Optimierungsentscheide in einer Spielszene

Abbildung 2 stellt eine Spielszene dar, in welcher Gelb (helle Figuren) z.B. die Punktemenge 17 gewürfelt hat. Diese setzt sich aus einem Sechser (= 12 Punkte) und einem Fünfer zusammen. - Wie soll der Spieler oder die Spielerin die Punktemenge taktisch klug aufteilen? Soll er mit der Figur am oberen Rand 17 Punkte weiterfahren, bis sie im sicheren Abstand zu den Konkurrenten steht? Soll er mit der Menge fünf, die gewürfelt worden ist, eine neue Figur ins Rennen schicken? Oder soll eine Kombination von Spielzügen durchgeführt werden, welche sich aus den folgenden Spielzügen zusammensetzt: a) eine neue Figur wird ins Spiel geschickt (dann sind fünf Punkte weg); b) die auf der ersten Bank stehende Figur wird um sieben Punkte auf die nächste Bank gestellt (jetzt sind zwölf Punkte verspielt); c) mit den restlichen fünf Punkten wird die gelbe Figur am oberen Rand vorwärts bewegt.

Die in Abbildung 2 geschilderte Szene macht deutlich, wie komplex die spielerischen und die arithmetischen Operationen sind. Spielerfahrung und Intelligenz im Spiel entwickeln sich laufend fort. Es braucht nur einen kleinen Schritt, bzw. eine interessante Frage, damit der Übergang zur Mathematik gelingt: „Was geschieht (oder geschah) im Spiel, wenn man es arithmetisch betrachtet und beschreibt?"

4.2 Mathematisierung durch Abstraktionen vom Spiel

Die Mathematisierung zeichnet sich dadurch aus, dass Verhältnisse des Spiels losgelöst von der Spielanlage oder gestützt auf sie in der Sprache der Arithmetik und mit den Mitteln der Arithmetik rekonstruiert werden. Die Bewusstheit der Angelegenheiten des Spiels ist die kognitive Grundlage für die arithmetischen Einsichten in die Zahlen- und Operationsverhältnisse.

Tabelle 2

Mathematisierbarkeit von Spielhandlungen

Spielregel	**Mathematisierbare Themen**
Fortgesetzte und immer differenziertere Wahrnehmung und Betrachtung der Spielanlage, der Struktur und Menge der Spielfelder etc.	Numerische Analyse der Spielanlage, kennen und zuordnen lernen der Zahlwörter, fortschreitender Aufbau von Zahlbegriffen, Kommunikation über die Zuordnungen zu den natürlichen Zahlen.
Wenn man eine Fünf würfelt, darf man eine Spielfigur auf die erste Bank setzen. Warum?	Die Fünf ist eine festgelegte Startzahl. Die Startbank ist das fünfte Feld, das eine Spielfigur zurücklegen muss. Wenn alle Spielfiguren die Startfelder verlassen haben, so hat man bereits $4 \cdot 5 = 20$ Felder erreicht.
Ich brauche vier Fünfer, bis ich alle Figuren auf der Startbank draussen habe.	
Wenn man eine Sechs würfelt, darf man zwölf Felder fahren. Warum?	Dies ist eine Spielregel. Zwölf ist das Doppelte von sechs.
Wenn man zwei Mal eine Sechs würfelt, so kann man 24 Felder vorwärts ziehen. Zwei Sechser sind erlaubt. Wer drei Sechser hintereinander würfelt, muss mit allen Spielfiguren nach Hause.	Zwei Sechser sind $2 \cdot 12 = 24$. Welches ist die höchst mögliche Zählzahl, wenn man drei Mal würfeln kann? Welches ist die kleinste Zählzahl, wenn man drei Mal würfeln kann?
Würfelt man eine grössere Punktezahl (12 + x), so kann man die Punktemenge taktisch auf die Bewegung der Spielfiguren aufgeteilt werden. Man fährt aus Sicherheitsgründen mit einzelnen Figuren auf die Bank, mit einer anderen Figur überholt man Gegner und schickt deren Figur zurück, usf.	Die Ganzheit einer gewürfelten Punktezahl wird mit Blick auf den Spielverlauf in Teilmengen aufgeteilt. Distributivgesetz erfahren und bewusstmachen. Dynamische Korrespondenz zwischen der Lage auf dem Spielbrett und den Punktemengen.
Die Vervielfachung der Bedeutung der Würfelaugen und der Zahlenfelder um den Faktor 10, 100, 1 000 und grösser bildet eine strukturierte Erweiterung des Zahlenwissens des Original-EmW.	Durch die strukturierte Symbolisierung erfahren die SuS, wie sich die Vervielfachung um 10, 100, etc. auf die Bedeutung der Zahlenwerte und Spielfelder auswirkt. Strukturen des dezimalen Stellenwertsystems werden mündlich und

	allmählich auch schriftlich angewendet und verstanden.

Tabelle 2 gibt eine Übersicht über mathematisierbare Spielgeschehnisse. Basis ist das Kennenlernen des Spielbretts. Je mehr Spielerfahrungen gemacht worden sind, desto differenzierter können die Kinder über das Spielbrett nachdenken und referieren. Es ist ersichtlich, dass bestimmte Zahlen sowohl Zählzahlen oder Summen sein können. Gleichzeitig sind sie mit einer Regel verknüpft, welche das Spielgeschehen beeinflusst. Sobald man beim ersten Wurf eine Sechs gewürfelt hat, kann eine Vielzahl von Zahlenkombinationen möglich sein. Darin sind Teile der Zwölferreihe enthalten:

- Verdoppeln von 6
- Kombinationen mit zwei Summanden: 12 + |1…6|
- Kombinationen mit drei Summanden: 12 + 12 + |1…5|
-

Dieser Abschnitt deutet an, dass die Entwicklung des Zählens, der Zahlbegriffe und der Operationen über mehrere Jahre verläuft. Weiter ist ersichtlich geworden, dass die Spielerfahrungen eine Differenzierung erleben, welche die Kinder begleitet, ausgehend von den Kenntnissen der Würfelzahlen bis zu den grossen Zahlen, ja selbst der Algebra.

Wenn es gelingt, die Natur dieser Erfahrungen im Mathematikunterricht und in der Sprache der Arithmetik zu integrieren, wird der notwendige Umgang mit den Lehrmitteln dynamisiert und von allein natürlicher, effizienter und eleganter (vgl. Schreiner, 2016; Capiaghi, 2018)

4.3 Eile mit Weile bedeutungsvoll mathematisieren

Das EmW wird durch eine didaktische Analyse (vgl. Klafki, 1996) in den mathematischen Lehr- und Lernprozess integriert. Das integrierte EmW entfaltet seine Wirkung u.a. mit der *Frage* nach bedeutsamen Erkenntnisinteressen. Das Mathematisieren des Spiels soll getragen sein von *integrierten Erkenntnisinteressen*, welche man zu *spezifischen Forschungsfragen* umformulieren lernt. Dieser Prozess ist nach Klafki (1996) etwas Soziales.

Er bedeutet, dass sich eine Gruppe zusammen mit der Lehrperson in eine Gemeinschaft mit einem Inhalt begibt. Diese Idee wurde durch eine Aussage des Malers, Mark Rothko, angeregt:

> Ein Bild lebt in Gemeinschaft, indem es sich in den Augen des einfühlsamen Betrachters entfaltet und dadurch in ihm auflebt. Es stirbt, wenn diese Gemeinschaft fehlt. Deshalb ist es ein gewagtes und gefühlloses Unterfangen, ein Bild in die Welt zu entsenden. (Rothko, 1947, o.S.)

Das Mathematisieren entsteht aus gemeinschaftlichen Begegnungen mit Inhalten des Spiels.

Eine ähnliche Stossrichtung enthält das Konzept der „Realistic Mathematics Education“ (RME) nach Freudenthal (1991). Mathematik ist etwas, das wird, indem man mathematisiert. Die Realität der Lernenden ist nicht eine, sondern eine vielfältige. Das Beobachten und Erkennen der Vielfalt von realen mathematischen Objekten der Lernenden ist die Basis für das geleitete

Wiederentdecken (guided reinvention) von mathematischen Objekten in der mathematischen Bildung.

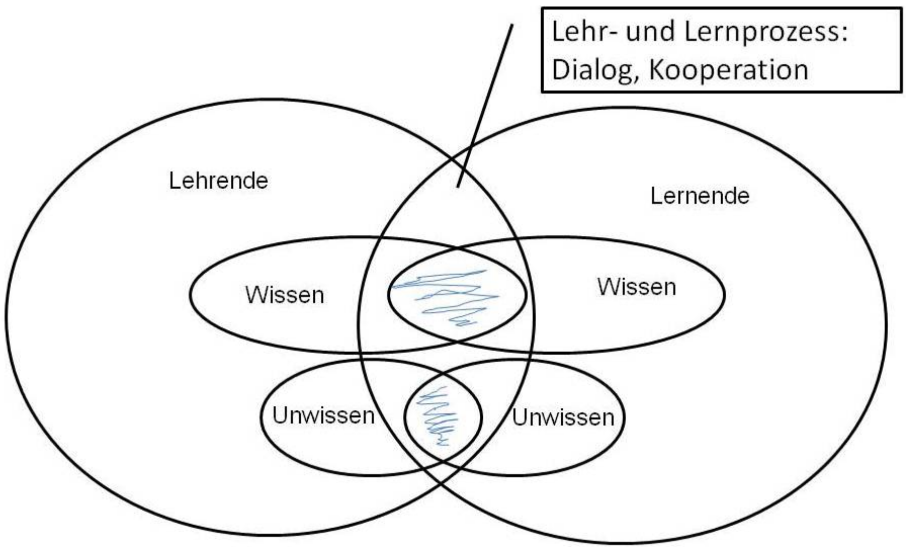


Abbildung 3: Dialektik im Lehr- Lernprozess

Abbildung 3 illustriert die Wechselwirkungen in der Schnittmenge des Lehr- und Lernprozesses. In ihm begegnen sich Personen mit ihrem Wissen und ihrem Unwissen. Unbewusst gemachte Erfahrungen treffen auch die Latenz der Gruppe (vgl. Pichon-Rivière, 2003). Im Spielen und im Mathematisieren stellt sich die Gruppe der latenten und manifesten Bildungsaufgabe.

Das Mathematisieren ist nicht Vermittlungsprozess, sondern Lernprozess. Es wird beobachtet und dann werden Lernende auf ihre mathematischen Objekte angesprochen (=Fragen, Konflikte, Erfahrungen, Wissen). Diese Erfahrungen werden mittels dem Beschreiben, dem Begründen, Beweisen und auch dem Berechnen durchgearbeitet. Geleitetes Wiederentdecken ist eine Schnittmenge, in der die Erfahrung der Lehrenden mit dem Wissen und dem Nichtwissen über mathematische Erfahrungen zusammentreffen und den Lernprozess generieren.

Dadurch kann vermieden werden, dass der Transfer vom Spiel zur Arithmetik (und umgekehrt) durch Belehrung, künstliche Arbeitsblätter oder „eingekleidete Sachaufgaben vorgegaukelt wird, während man keine Ahnung hat, über welche Erkenntnisfragen die Kinder den Transfer herstellen möchten.

Diese Problematik bleibt zum Teil auch ungelöst, wenn *Kernideen* im Sinn von Ruf & Gallin (1990) allein von den Lehrpersonen formuliert werden. Es ist m.E. pädagogisch geschickter, wenn man das Erkenntnisinteresse der Lernenden zum Anlass nimmt für mathematische Untersuchungen von Spielsituationen oder Problemlösungen etc.

4.3.1 Das Vorwärtsschreiten und das Hüpfen

Die Kampagnen «Weg vom zählenden Rechnen» (vgl. Häsel-Weide, Nührenbörger, Moser Opitz & Wittich, 2013) kann im EmW spielerisch und mit etwas taktischer Beratung eleganter erreicht werden (vgl. Kamii & Anderson, 2003). Das abzählende Vorwärtsschreiten ist solides und sozial kontrolliertes Zählen (1:1) im Wissen um Zahlbegriffe. Taktische Erfahrungen bilden die Grundlage für die Einsicht in die Rechengesetze, v.a. das Kommutativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz. Die folgenden formalisierten Spielsituationen sind idealtypische Erfahrungen für das Mathematisieren.

4.3.2 Die Einerschritte – Anfang und Mittel für Beweise

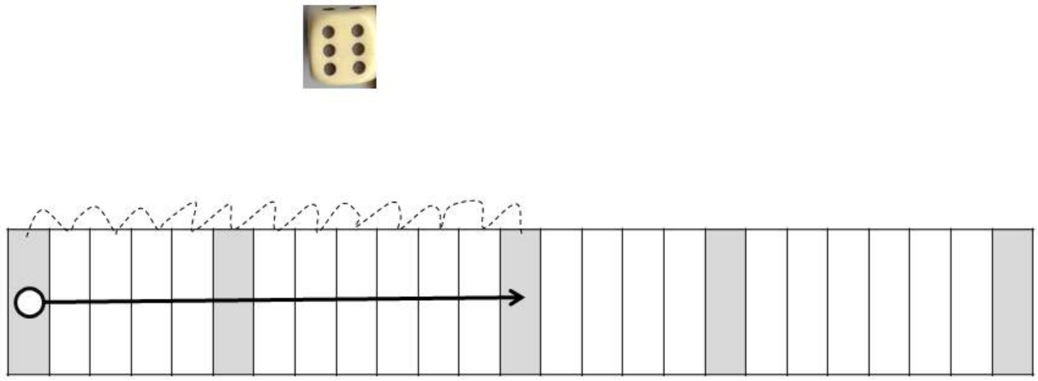


Abbildung 4: Einerschritte und Beweisen

Die Spielerin weiss (siehe Abbildung 4), dass sechs Augen zwölf Punkte bedeuten. Diese werden einzeln abgezählt, bis das zwölfte Spielfeld erreicht ist.

4.3.3 Einerschritte und Hüpfen gemischt

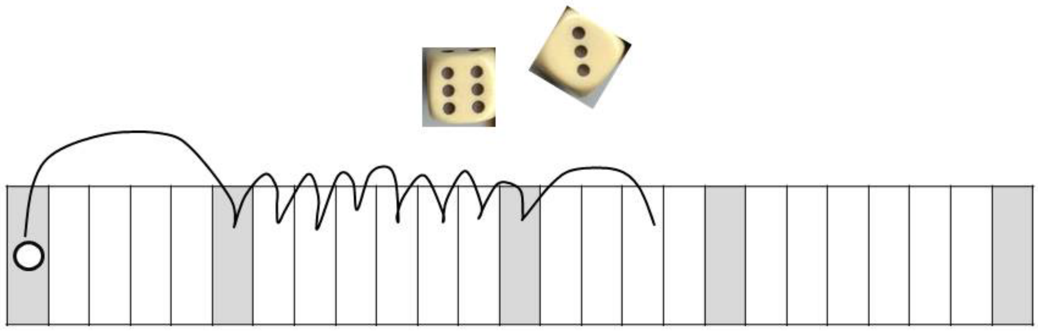


Abbildung 5: Einerschritte und Hüpfen

Die Spielerin in Abbildung 5 hat einen Begriff von fünf. Sie teilt die Punktesumme von 15 auf den folgenden «Abzählterm» auf: 15=5+1+1+1+1+1+1+1+3 Fünf wird sogleich gehüpft, danach werden 7 einzelne Felder beschritten und noch ein Dreiersprung durchgeführt. Man müsste die Spieler auffordern, laut zu denken, damit man eruieren kann, ob die Teilmengen (5, 7, 3) aufgeteilt oder durchgezählt werden.

4.3.4 Geschicktes Hüpfen

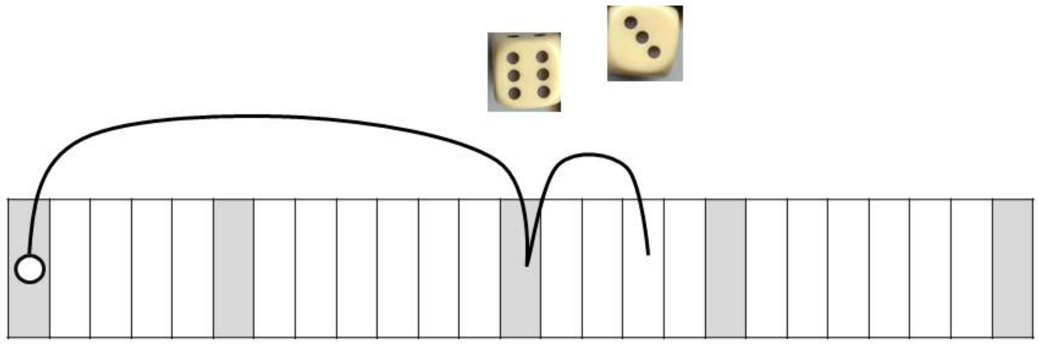


Abbildung 6: Geschicktes Hüpfen – Zahlenmenge strukturieren

Der Spieler in Abbildung 6 hat einen Begriff von 12 = (5+7), die drei restlichen Punkte werden auch gehüpft, sodass die Punktesumme von 15 erschöpft ist.

4.4 Zahlenräume mit komplexeren Spielregeln erweitern und dynamisch behandeln

Die Schulische Heilpädagogin, A.M., arbeitete mit einer zweiten Klasse während zwei Stunden am Thema des Verdoppelns von Zahlen im Hunderterraum. Dies wurde im Sinne des aktiv-entdeckenden Lehrens und Lernens durchgeführt. In der anschliessenden Analyse der Lektionen vom 14.11.2014 stellte sich heraus, dass das Verdoppeln anschaulich dargestellter Mengen (Punktestreifen, Geld, Dienes-Material) mit dem Spiegel unterschiedliche Lösungswege ans Licht gebracht hatte. Die Beziehungen zwischen den ikonischen Darstellungen, den Zahlbegriffen, der Operation des Verdoppelns und der symbolischen Darstellungen erwiesen sich als komplex und noch so eindeutig, wie man sich das wünschte. Die Induktion eines Sprachspiels im Sitzkreis bildete eine grosse Herausforderung. Die Kinder berichteten zwar über ihre eigenen Produkte, die Besprechung gemeinsamer Lerngegenstände blieb noch verhalten. Da stellte sich die Frage, was unternommen werden könnte, damit die Kinder die Logik der Lösungen und die Begriffe miteinander untersuchen würden, ganz im Sinn des Sprachspiels (Wittgenstein, 2013)?

Die Vermutung liegt nahe, dass ein statischer Umgang mit den Spiegel-Übungen zwar unterhaltsam ist, dass er aber eher oberflächliche oder anekdotische Sprachspiele erzeugt, weil die Tätigkeiten zu vereinzelt, zu analytisch und bloss innermathematisch sind (Freudenthal, 1977). Das schmälert die Bedeutsamkeit der Thematik und der Tätigkeiten. Dieser Sachverhalt lässt sich auch so umschreiben, dass das Spiegeln von Material eine isolierte unterrichtliche Tätigkeit bleibt. Die damit verbundenen Fragestellungen an die Schüler sind fremdbestimmt, es sind die Fragen der Lehrpersonen oder der Schulbuchautoren. – Wie könnte dieser Vorgang dynamisiert werden?

Zuerst müsste dafür gesorgt werden, dass das Spiegeln von Materialien eine bedeutsamere Rolle innerhalb einer mathematischen Tätigkeit wie dem Beweisen oder dem Argumentieren bekäme. Im Fall von kognitiven Konflikten über arithmetische Sachverhalte im Hunderterraum würden die

Kinder zu Anschauungsmaterial und Spiegeln greifen, um Annahmen zu beweisen. Kognitive Konflikte enthalten immer bedeutsame und eigene Fragestellungen.

Eine weitere Massnahme der Dynamisierung ist die Abstraktion von den Anschauungsmitteln und die Fokussierung auf die mathematische Sprache. Diese wären eingebettet in das Eile mit Weile. Das heisst, dass das Verdoppeln im Hunderterraum nicht eine statische und isolierte, anschauliche Übung ist, sondern eine Operation im Rahmen dieses Spiels.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass das Eile mit Weile eher ein abstraktes Gesellschaftsspiel ist, weil die Spielfelder nicht nummeriert und die strukturierten Zählstrategien mentaler Art sind.

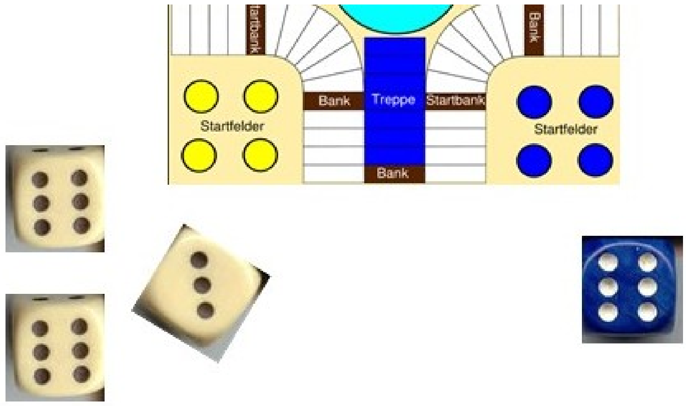


Abbildung 7: Komplexe Spielregeln entwickeln

Die Abbildung 7 illustriert eine komplexe Spielregel. Mit den drei weissen Würfeln werden die Punkte pro Spielzug geworfen. Die erreichte Anzahl (hier 12+12+3=27) wird verdoppelt, wenn beim blauen Würfel, der mit den weissen zusammen geworfen wird, eine *gerade Zahl* erscheint. Bei ungeraden Zahlen könnte der Wert belassen oder sogar halbiert werden. Die Spieler vereinbaren die Regeln und den Schwierigkeitsgrad selbst, so bleibt das Eile mit Weile attraktiv, weil es adaptiv ist.

Auf diese Weise könnte der Zielbereich theoretisch mit einem Wurf erreicht werden. Eine Runde besteht aus 4 · 17 Punkten. Die maximale Punktzahl wäre mit drei Würfeln 3 · 12 · 2. – Diese komplexere Spielregel fordert dazu heraus, dass die Kinder die Sektoren des Spielfeldes bewusst unterteilen in die Abschnitte 5 – 7 – 5. Diese Struktur bringen sie in eine Korrespondenz mit den gewürfelten Punkten.

Sofern das Eile mit Weile für die Kinder ein bedeutsames Spiel ist, kann mit der komplexen Regel die Operation des Verdoppelns und Halbierens im Hunderterraum auf einfache und abstrakte Weise geübt und gefestigt werden. Kognitive Konflikte und „Fehler“ beim Rechnen könnten beobachtet und in anschliessenden mathematischen Denkrunden untersucht werden.

4.5 Vom Spielfeld zum Zahlenstrahl

Das Studium der Spielerfahrungen ist ein Fundament für die fortschreitende Differenzierung und Formalisierung mathematischer Kompetenzen. Die Kinder können doch unterscheiden zwischen der Spielanlage und den Anlagen in der Mathematik! The challenge for teachers is to “help students keep hold of the big picture as they explore the parts” (Russell, et al., 2002a, zit. nach Konold & Higgins, 2003, S. 212). Eile mit Weile zu mathematisieren, ist folglich primär eine Herausforderung an die Lehrpersonen.

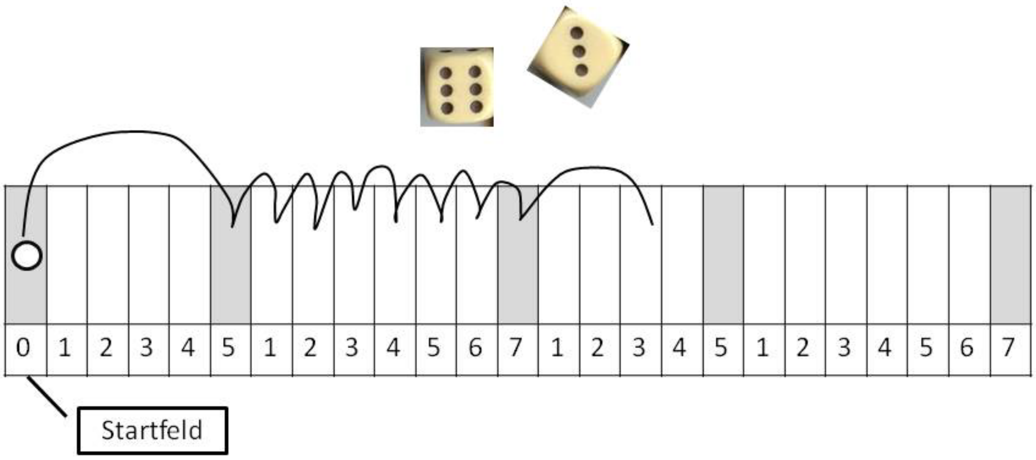


Abbildung 8: Strukturen auf dem Spielbrett

Das originale Spielbrett wird zuerst sprachlich erkundet und danach dekonstruiert, siehe Abb. 8 und Spielstreifen im Anhang. Die Startfelder erhalten die Zahl null. Das erste Spielfeld eine Eins usf. Die Bänke markieren das Ende eines Blocks. Man könnte die Spielfelder auch durchzählen, siehe Spielstreifen im Anhang. Dann wüsste man, dass es insgesamt 76 Felder sind.

Die Einführung der Null muss noch nicht mathematisch begründet werden. Besser wäre es, wenn man es mit dem Totalverlust der Punkte verknüpft würde: „Jetzt musst du wieder bei null beginnen» (siehe den folgenden Abschnitt). Eine andere Variante besteht darin, dass die Kinder die Frage diskutieren, was eigentlich die Spielfelder seien, auf denen gezählt wird, und was die «Nicht-Spielfelder» seien, welche z.B., die Funktion von Warteräumen haben? Die «Warteräume» sind Felder, die bezüglich des Spieles nichts Zählbares enthalten, mengentheoretisch die Kardinalität der leeren Menge genannt. Umschreibungen wie «nichts Zählbares» gehörten zu Ur-Erfahrungen mit der Null (vgl. Frege, 2001).

Der Spielstreifen bildet eine «mentale Brücke» zwischen dem Spielbrett und dem Zahlenstrahl. Die Kinder sollten erkennen können, dass beim Spielbrett und beim Spielstreifen *Spielfelder* zur Verfügung stehen. Beim Zahlenstrahl sind es nur noch Punkte oder Striche auf einer Linie. Die Null ist jetzt eine Zahl.

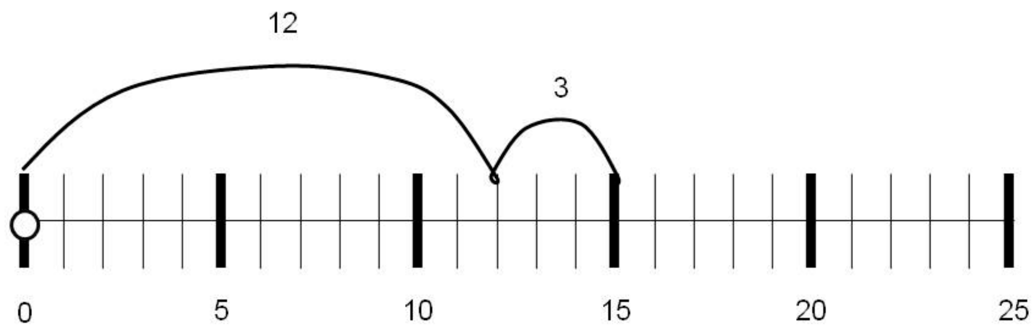


Abbildung 9: Der Zahlenstrahl mit Fünferschritten skaliert

Abbildung 9 illustriert die Strukturierung des Zahlenstrahls und die Verteilung der Zähl- bzw. Hüpfschritte. Der Zahlenstrahl hat mit dem EmW direkt nichts mehr zu tun. Er ist eine Abstraktion. Mit ihm könnte man auch andere Spiele abstrakt darstellen (z.B. das Leiterspiel). Der oben illustrierte Wurf (6, 3) wäre hier mit den zwei Sprüngen (12+3) ausgedrückt worden.

Es fällt auf, dass bei diesem Vorgehen mit der fortschreitenden Abstraktion das Wissen um den Zahlenstrahl bereits auf Vorerfahrungen mit strukturierten Mengen und Teilmengen beruht.

4.5.1 Transfers und Korrespondenzen zwischen Spielbrett und Zahlenstrahl

Im Anhang befinden sich zwei Seiten mit dem gleichen Titel. Es wird vorgeschlagen, die Mathematisierung des Spiels mit Hilfe von Erkundungen, „Umbauten" und später durch Übungen mit Hilfe des Zahlenstrahls durchzuführen. Radatz et al. (1998) betonen:

> Der Zahlenstrahl ist für viele Kinder ein nur schwer zu verstehendes Modell der natürlichen Zahlen. Er enthält zahlreiche Konventionen, die erst erlernt und verstanden werden müssen bzw. – schlimmer noch – zu den bisherigen Erfahrungen im Umgang mit Zahlen und deren Repräsentanten im Widerspruch stehen. So kennzeichnet z.B. der dritte Strich die Zahl 2. Aus diesem Grunde haben wir im Band 1 vorgeschlagen, auf den Einsatz des Zahlenstrahls im 1. Schuljahr zu verzichten. (ebd., S. 38)

Durch die Arbeit mit dem Zahlenstrahl erstellen die Kinder Korrespondenzen zwischen dem Spielbrett und einer abstrakteren Darstellungsform. Die Arbeit mit dem Zahlenstrahl hat eine Brückenfunktion zwischen den Spielerfahrungen und den Erfahrungen und Kenntnissen mit den Zahlen und den Operationen in der Mathematik. Grundsätzlich sollte man diese Gespräche und Untersuchungen in der Mathematikstunde durchführen. Die Seiten im Anhang enthalten noch präzisere Anleitungen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Anders als beim Zwanziger- oder beim Hunderterfeld kann die Erweiterung von N auf N_0 mit Hilfe des Eile mit Weile erfahren, bewusst gemacht und auf den Zahlenstrahl übertragen werden.

4.5.2 « Wieder bei null beginnen"

Nach Bialystok & Codd (2000) ist die Null sowohl eine kulturelle Errungenschaft also auch ein quantitatives Konzept. Die Entwicklung des Zählens gehe von der Annahme aus, dass zählbare Objekte vorkommen.

Entwicklungen des Begriffs der Null und deren Didaktik werden in der Literatur seit Jahren untersucht (vgl. Alvarado & Ferreiro, 2002, Anthony & Walshaw, 2004; Baroody, 1988; Baroody, 1999; Bialystok & Codd, 2000; Kaplan, 2004; Levenson, 2013; Schmidt, 1982; Wilson, 2001). Schmidt (1982) stellte fest, dass 91% der Schulanfänger die Null schreiben können.

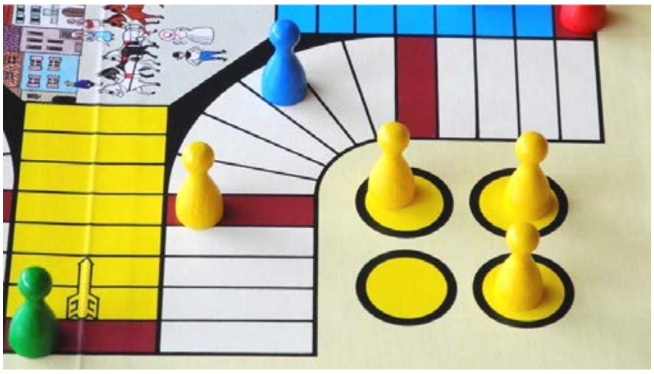


Abbildung 10: Eile mit Weile und die Zahl Null

Wählt man die Spielerfahrungen für mathematische Betrachtungen über die natürlichen Zahlen und die Null, so lassen sich die folgenden Gedanken anstellen. In der Umgangssprache des Spiels kommt der Ausspruch vor: „Jetzt muss ich wieder bei null beginnen." Dieses Schicksal widerfährt demjenigen, der drei Mal die Zwölf gewürfelt hat, oder dessen erste Figur im Spiel überholen worden ist. Eine zweite Erfahrung beruht auf der Regel, dass die ersten fünf Punkte beim Verlassen der Startposition auf dem Spielfeld liegen und nicht Teil der Startposition sind. Die Startposition ist demnach noch nichts oder im Fall der drei Mal zwölf das Schicksal, bei null beginnen zu müssen. Diese Erfahrung gilt es, bewusst ins Sprachspiel aufzunehmen. Das Spielbrett ist aus Spielfeldern und der Startposition (Null; Absenz von Spielfeldern) zusammengesetzt. Der Übertrag auf den Zahlenstrahl und die Menge *(N_0)* ist plausibel und logisch (siehe Abbildung 8 und 9).

Nach Bialystok & Codd (2000) fällt es den Kindern schwerer, den Begriff der Null aus den üblichen Zahlkonzeptübungen abzuleiten. Die Routinen des Wahrnehmens von analogen Objekten, des Zuordnens von Fingern und der entsprechenden Zahl sind weit verbreitet und statisch. Die Zuhilfenahme des EIS-Prinzips bei diesem Vorgehen trägt eher zu einer Zementierung dieser Routinen bei. Die ko-konstruktiven Sprachspiele über Zusammenhänge zwischen dem Eile mit Weile und dem Zahlenstrahl provozieren dynamischere Mathematisierungen. Die Darstellung und die Vorstellung von Null als Standort und Ausgangsort des Spiels, oder je nach Regel, die Vorstellung, dass man nichts fahren darf oder mit allen Figuren wieder zum Ausgangsort zurück muss, sind Spielerfahrungen, welche dynamisch mathematisierbar sind.

4.5.3 Das Lesen der Ziffern

Dies fällt den Schulanfängern wesentlich leichter (Schmidt, 1982). Im Durchschnitt konnten die Schüler 9 Ziffern richtig benennen. Mehr als Dreiviertel der Schüler konnten alle 10 Ziffern von 0-9 richtig lesen. Vermerke im Kontrollblatt, ob das Kind zu den ¾ gehört, die alle Ziffern von 0-9 lesen können oder nicht.

4.6 Übergänge und Abstraktionen

Mit diesen Übungen wird die fortschreitende Mathematisierung und Formalisierung lanciert. Vielleicht ist die Arbeit am Zahlenstrahl noch verfrüht und zu abstrakt oder nicht bedeutsam.

Die Arbeit mit dem „gestreckten Eile mit Weile“ oder eben dem Spielstreifen hat eine Brückenfunktion zwischen den Spielerfahrungen und den Erfahrungen und Kenntnissen mit den Zahlen und den Operationen in der Mathematik, sowie in einer nächsten Etappe mit dem Zahlenstrahl.

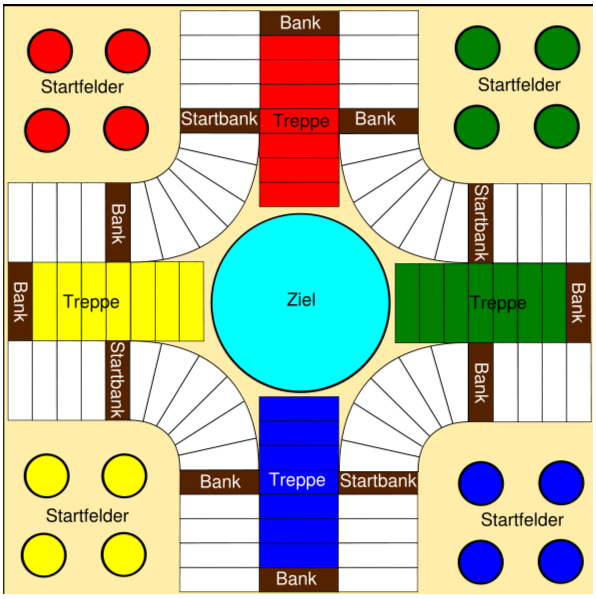


Abbildung 11: Eile mit Weile mathematisch untersuchen

Grundsätzlich sollte man Gespräche über die Bedeutsamkeit der Lernobjekte und Untersuchungen in der Mathematikstunde durchführen.

4.6.1 Didaktische Hinweise zum Spielstreifen

Abbildung 12: Gerader Spielstreifen

Führe mit den Schülerinnen und Schülern ein „Umbauprojekt“ und Orientierungsübungen durch, siehe Abbildung 13. Sie dienen auch dem Aufbau und der Pflege des Wortschatzes sowohl beim

Spielbrett als auch beim Spielstreifen. **Die Kernidee** würde lauten: „Wie sähe das Eile mit Weile aus, wenn es schnurgerade gestaltet wäre?" Vielleicht wird ein Kind einwenden: „Darf es auch gebogen sein?" – Bestimmt darf es das, entscheidend ist, dass die Struktur und die Einteilung der Streifen erhaltenbleibt. Lose Kärtchen aus Karton wären auch zugelassen. Vielleicht möchte ein Kind „Pistenbauer" oder „Pistenbauerin" sein und die Felder für ein Spiel einrichten.

Gehe mit den linearen Spielfeldern offen und kreativ um. Die gewohnten *Startfelder* sind jetzt vor dem Spielstreifen links. Danach folgt die gewohnte 5-7-5-5-7-5…8er - Einteilung. Der 8er-Streifen ist der Weg ins Ziel.

Die Einteilung mit den Banken soll erkannt und auf den leeren Spielstreifen übertragen werden.

Je nach Erkenntnisinteresse könnten die folgenden Fragen untersucht und erörtert werden. Z.B.

- Wie zählst du, wenn du z.B. 15 gewürfelt hast? Mit der Frage (wie zählst du, wenn…) leiten die Kinder Demonstrationen ihrer Zählstrategien ein. Zudem liefert diese Frage Stoff für Zählübungen. Jeder bewegt sich so, wie er kann. Sei es durch Abzählen in Einerschritten oder in Zweierschritten, sei es durch elegante Zählschritte und Wahrnehmungen der Menge der Spielfelder. Jeder und jede erwirbt subjektiv bedeutsame Zähltricks (Strukturierungen).
- Haben alle Spieler gleich weit bis zum Ziel? (Diese Frage könnte auch die Invarianz klären helfen.)
- Wo befindet sich die Mitte der Spielfelder (mit der Treppe, ohne die Treppe)?
- Wo befinden sich die Viertel der Spielfelder? Wo die Drittel? Mit solchen Fragen könnten Anknüpfungen an die Bruchzahlen entwickelt werden.
- Usf.

4.6.2 Vom Spielbrett und dem Spielstreifen zum Zahlenstrahl

Die Kernidee würde jetzt lauten: „Wie sähe das Eile mit Weile aus, wenn es als Zahlengerade gestaltet wäre?"

Anders als bei Hüpfspielen draussen oder auf dem Spielbrett oder dem Spielstreifen beinhaltet der Zahlenstrahl die Null. Der Zahlenstrahl ist auch kein eigentliches Spielbrett mehr, aber man kann immer noch damit spielen, wenn man von Strich zu Strich hüpft.

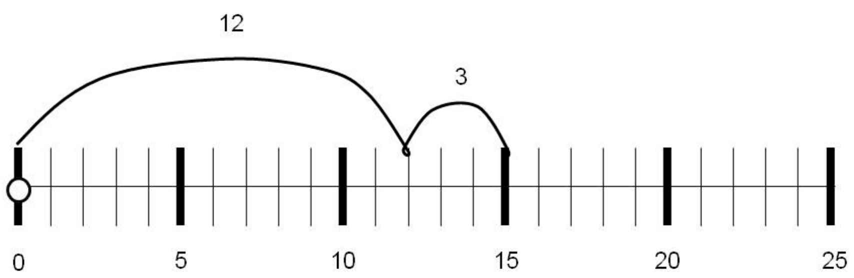


Abbildung 13: Spielbrett und Zahlenstrahl

- Die Bündelung der Zehner muss nicht erzwungen werden. Die Kinder können sie selbst als Strukturierungshilfe eintragen.

- Dasselbe gilt mit den Zahlen, nominal (die Zahlwortreihe), ordinal (der Rang eines Spielfeldes in der Spielfeldreihe) und kardinal (der Anzahlaspekt der Spielfelder).
- Man könnte auch auf einem verbreiterten Zahlenstrahl spielen lassen. Dann müssten die Spielfiguren gruppenweise beim Start warten. Ansonsten gelten dieselben Regeln wie beim EmW.
- Wenn die Kinder Lust haben, können sie die Bänke nach eigenem Gutdünken auf dem leeren Zahlenstrahl eintragen oder sogar eigene Eile mit Weile kreieren (Dreiecksform für drei Spieler usf.).

4.7 Struktur der Würfe – Struktur der Mengen

Konkret äussert sich das in Fragen im Stil von: „Ich möchte verstehen lernen, wie viele Felder alle meine Figuren durchschreiten müssen, bis sie im Ziel sind?“ Dies Frage würde dann präzisiert oder durch Erfahrung differenziert um den Zusatz: „im Minimum gehen müssen“. Der Operator „Felder durchschreiten müssen“ würde von den Kindern als Ganzes verstanden und in seinen Teilen erkannt und später berechnet.

„Gewinnen derjenige Spieler oder diejenige Spielerin das Eile mit Weile, welche am meisten Punkte würfeln?“ könnte eine weitere wirkungsvolle Frage lauten. Bald wird man sehen, dass die Antwort nicht einfach Ja oder Nein lautet, sondern komplexe Überlegungen zu den Spielbedingungen und Spielverläufen nach sich zieht. All dies ist mathematisierbar!

Diese kurzen Überlegungen weisen auf einen Aspekt hin, den Freudenthal (1991) mit dem Prinzip „realistic“ umschrieben hat. Die mathematischen Handlungen spielen sich in den Bereichen ab, welche die Kinder im „Sinn“ haben. (Diese Frage wird von Erziehern eher gestellt, wenn sie vermuten, dass Kinder oder Jugendliche etwas im Schilde führen bzw. etwas anstellen wollen. Oder man wird und wurde nach einer Tat gefragt: „Was hast du bloss im Sinn gehabt?“ Freudenthalt (1991) stellte diese Frage echt, als Mathematiker und als Pädagoge. Mit ihr entsteht im Unterricht ein Wechselspiel zwischen den Bedeutungen und der Bedeutsamkeit. Sinn wird durch dieses Vorgehen beobachtet, aufgegriffen und kommuniziert. Er wird nicht durch Lehrpersonen gespendet oder vage in irgendwelche Aufgaben hinein projiziert.

Daneben steht das Lerninteresse, es betrifft das Üben und Automatisieren der Würfelzahlen 12 + |1…6| + |1…6, bzw. |1…5|, da 24 + 12 den Verlust sämtlicher erreichter Spielfelder bedeutet.

Die arithmetische Struktur des *idealen* Verlaufs des Spiels sieht wie folgt aus. Jeder Spieler muss seine vier Spielfiguren über 4 · (5 + 7 + 5) + 8 Spielfelder gehen lassen. Für alle Spielfiguren pro Farbe ergibt das den Term (4 · (4 · (5 + 7 + 5) + 8)). Das sind 4 · 76 Felder = 304 Felder. Idealerweise muss jeder Spieler mit seiner Farbe 304 Felder abschreiten. Wenn man die Verluste dazu nimmt, so wächst die Zahl der Spielfelder. Wahrscheinlich ist noch niemand im Sinn des idealen Verlaufs (vergleiche mit der Ideallinie im Skisport) mit allen Figuren ins Ziel gekommen. Die realen Wege bieten eine grosse Variation von Erfahrungen an, die man mathematisieren kann.

Schon diese Operationen zeigen, dass das Spiel hervorragend geeignet ist, um elementare Strukturen der Zahlen und Operationen zu erfahren, bewusst zu machen und zu routinisieren. Das ist ein fortschreitender Prozess, der mit dem Verständnis der Würfelzahlen beginnt, über das korrespondierende Zählen zwischen den Würfelaugen und einzelnen Feldern voranschreitet, bis man schliesslich beim kompetenten Umgang mit strukturierten (abstrakten) Zahlenmengen (und deren Teilen) angelangt ist. Der Umgang mit strukturierten Mengen wird durch das mehrmalige Würfeln (bei sechs Würfelaugen darf man zwölf Felder fahren plus nochmals würfeln und weiter ziehen) herausgefordert. Strategien und Taktiken ergeben etliche Variationen von Spielbewegungen. Man kann also sagen, dass in den Mathematikstunden die Korrespondenz zwischen der Spielerfahrung (das enaktive, ästhetische System) auf der einen Seite und dem numerischen Symbolsystem der Arithmetik auf der anderen Seite aufgebaut, gepflegt und differenziert wird.

Diese Skizze tönt an, dass die Symbolisierung auch bei den Operationen einen Kompetenzzuwachs ermöglicht und erfordert. Was am Anfang als einfaches Zählen, als 1:1 Zuordnung zwischen den Würfelaugen und den Spielfeldern beobachtbar ist, entwickelt sich kontinuierlich weiter. Der Einsatz von Taktiken ist ein Indikator dafür, dass sich Kinder vom elementaren Würfeln, abzählen und zählenden Hüpfen gelöst haben. In Streitfällen kann dieses elementare Zählen aber eine andere Funktion haben, nämlich diejenige einer Beweismethode.

Ein Indikator für erweitertes Operieren wäre zum Beispiel auch in der folgenden Aussage zu sehen. Wenn Kinder auf der letzten Bank am Fuss der Treppe stehen und sagen: „Jetzt brauche ich noch 8 Punkte, dann bin ich am Ziel." Natürlich ist das noch kein elaborierter *Begriff der Differenz*, aber es ist ein Baustein davon. Differenzen kann man von jeder Position aus bestimmen, für einzelne Spielfiguren aber auch für Gruppen von Spielfiguren. Hier würde die Frage lauten: „Wie viele Punkte brauchen diese beiden Figuren noch, bis sie am Ziel sind?"

Würde man mit den Kindern den realen Verlauf mit einer ausgewählten Spielfigur zum Beispiel nachzeichnen, so müsste eine ziemlich komplexe Beobachtung dokumentiert und berechnet werden. Man könnte die Figur durch das Los bestimmen. Man könnte ihr einen Namen geben, z.B. Einstein oder Hello Kitty. Diese Figur müsste während des Spiels beobachtet werden. Es sähe ähnlich aus wie die Registrierung von Messgrössen von Radrennfahrern während einzelnen Tour-de-France-Etappen, nur dass jetzt mit Papier und Bleistift oder mit einer Videokamera Daten festgehalten würden.

Die Kinder würden dann z.B. alle Spielzüge einer bestimmten Figur dokumentieren, kategorisieren und zusammenzählen können, additiv und multiplikativ. Die Klammerregeln, das Assoziativ-, das Kommutativ und das Distributivgesetz erscheinen logisch und einsichtig, weil man deren Bedeutungen im Spiel erfahren hat. Durch eine kluge Vernetzung mit der Spielerfahrung kann man das Spiel als didaktisches Arbeitsmittel verwenden lernen. Da wären nicht nur die Kraft der Fünf, sondern auch die Kraft der Sieben und warum nicht die Kraft der Zwölf – *kräftige Zahlbegriffe* also anstelle von suggestiven Projektionen auf irgendwelche Zahlen des Zehnersystems.

4.8 Klammerregeln in der elementaren Algebra

Die Klammerregeln sind für viele ein Stolperstein in der elementaren Algebra. Soll man die Regel auswendig lernen? Warum nicht. Man kann sie auch verstehen lernen. Nehmen wir z.B. das Minuszeichen vor einer Klammer zum Anlass, um mit Hilfe des Eile mit Weile eine exemplarische Argumentation aufzubauen. Die Regel fordert, dass man bei Minuszeichen vor einer Klammer die Vorzeichen innerhalb der Klammer umkehrt.

$a - (b + c + d) = a - b - c - d$

a sei ein beliebiges Feld, auf dem eine Spielfigur stehe. Nun würfelt die Person drei Mal hintereinander eine Sechs. Das bedeutet im Spiel, dass sie drei Mal 12 Punkte zusammenzählen könnte. Die Regel will, dass der Spieler in diesem Fall mit all seinen Figuren auf die Startfelder zurückkehren muss. Das könnte wie folgt beschrieben werden:
a – (12 + 12 + 12) = a – 12 – 12 - 12
Die drei Zwölfer läuten aber die grosse Subtraktion für alle mit den Figuren erreichten Punkte ein. Die in der Klammerregel beschriebene Szene wäre u.U. im wirklichen Spiel nicht so katastrophal.

Weiter kann man die grundlegenden Regeln der Algebra, das Kommunikativ-, das Assoziativ- und das Distributivgesetz, mit dem Eile mit Weile sehr schön exemplifizieren.

5 Vom mathematischen Denken zum Spiel und zurück – die kognitive Akzeleration

Möglichkeiten für Entwicklungen zu schaffen (vgl. Cuomo, 2007), ist eine der wichtigsten Aufgaben des heilpädagogischen Schaffens. Viel zu oft bewegt sich die Heilpädagogik im Windschatten der Transmissionspädagogik (vgl. Wink, 2011; Cuomo, 2007). Das hat zur Folge, dass sie aus Sicht der kritischen Pädagogik den Unterricht, welcher Defizite erzeugt, Etiketten verteilt und Bildungsferne vergrössert, mit fragwürdigen und ineffizienten Methoden mit dem Label «integrativ» legitimiert, anstatt dass sie ihn verändern kann (transformative Pädagogik).

Ein Beispiel dazu. Während eines Unterrichtsbesuches bei N.N, SHP (2019) machten die SuS einer Einführungsklasse während der ersten Lektion verschiedene Orientierungsübungen im Zahlenraum bis 20. Diese basierten auf den gängigen fachdidaktischen Empfehlungen (Zahlen der Grösse nach ordnen, fehlende Zahlenkarten und Punktemuster erkennen, Punktemuster zu Zahlen zuordnen und umgekehrt, Kraft der Fünf erfassen. Zwischendurch wurden die Sonnen, welche die SuS als Belohnung für gute Taten erhalten hatten, umgetauscht. 10 Sonnen entsprechen einem Edelstein. Mit Hilfe eines Puppenspiels wurden anschliessend einfache Gleichungen im Dialog und operativ (rote, blaue Plättchen, Punktefeld) erarbeitet: 8+2=10, 3+4=7. Am Schluss lösten die SuS Arbeitsblätter im Zahlenraum 10 aus dem Förderprogramm «Komm mit – rechne mit»: z.B. 3 rote und 4 blaue Plättchen ergeben 7 Plättchen usf. Die Schlussübung war nicht produktiv. Die SuS sollten die Punktedarstellung (ausgemalte rote und blaue Kreise) ohne zu zählen erfassen und die Gleichung im Kopf bestimmen und symbolisch darstellen.

Interessant zu beobachten war, dass sowohl die SHP mit dem Umtauschen der Belohnungssterne als auch die SuS *informell und lebhaft* über ihre Kompetenzen beim Zählen im Hunderterraum sprachen. – Da stellt sich die Frage: Ist es möglich, die Arbeit an den elementaren Aussagen (Gleichungen, additive Terme, Bündelung, Stellenwerte) mit den Interessen und Themen der SuS zu verknüpfen (Belohnungssterne, grosse Zahlen)? Anders gefragt: Ist es möglich, die relativ *eng geführte materielle und gedankliche* Auseinandersetzung vor und mit dem Arbeitsblatt im Vertrauen auf die Interessen der SuS zu öffnen?

Ja, das ist es! Die Integration der Interessen und Themen ist nach Freudenthal (1991) und Wubbels (1997) Indikator guter und sozialer Lehrkompetenzen. Im Klartext heisst das, dass jede fachdidaktische Empfehlung *systemisch und didaktisch analysiert* werden soll, damit die Bedeutsamkeit der Inhalte und der Zielarbeit wirklich und nicht nur idealistisch legitimiert werden kann.

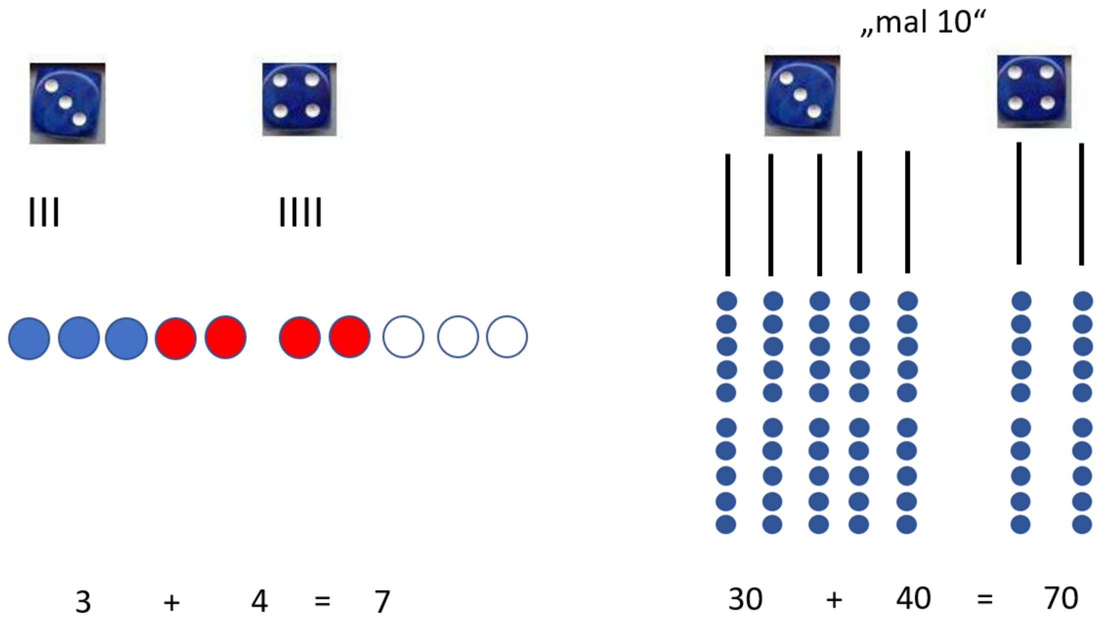


Abbildung 14: Darstellung und Erweiterung der Punkte, Zahlen und Aussagen

Abbildung 14 zeigt verschiedene Darstellungsmöglichkeiten im Zusammenhang mit den mathematischen Objekten (3, 4, 7, 10, 30, 40, 70) und den mathematischen Operationen (Addition, Multiplikation) und den mathematischen Aussagen (Term, Gleichheitsrelation) zwischen den Objekten und den an ihnen ausgeführten Operationen. Dass das mündlich dargestellt, verknüpft und abgeleitet werden kann, ist nach Duval (1993) auch schon eine Darstellungsform. Das entdeckende *Lernen* spielt sich in und zwischen den Konversionen der Darstellungsformen und Mittel ab. Das sind *die Umwandlungen bei gleichbleibender Bedeutung* (Invarianz) zwischen enaktiven, ikonischen und symbolischen Darstellungen (vgl. Duval, 1993).

Die SHP hat ja mit den SuS die Belohnungssonnen umgetauscht zu Edelsteinen, im Verhältnis 10:1, die SuS sprachen von grossen Zahlen. Das sind Ressourcen, welche ganz viele Themen der geführten Übungsstunde *in der Komplexität vernetzen*.

Die Forschungen im Rahmen der kognitiven Akzeleration (vgl. Adey, 2008) haben bewiesen, dass es sich lohnt, wenn die SuS in Denkschulungen ausgehend von Mustern oder Modellen neue und interessante Zusammenhänge *entdecken dürfen*. Die SuS erfinden in kleinen Gruppen Muster, welche die Verwandtschaft (d.i. die multiplikative Relation, Erweiterung der Gleichung) zwischen den Additionen der Einer und der Hunderter, z.B. erfassen. Die Entdeckungen werden im Plenum vorgestellt und *logisch begründet*, diese ca. 5-7-minütige Phase wird Sharing genannt. Anschliessend diskutieren und erfinden die SuS metakognitive Gedanken über die Darstellung (enaktiv-symbolisch) und die Verwandtschaft (das Vielfache zwischen den Gleichungen). Diese Metakognition dauert 5 Minuten und wird im Anschluss an die Gespräche in den Gruppen im Plenum ausgetauscht.

Im folgenden Abschnitt wird eine Musterlektion i.S. der kognitiven Akzeleration exemplarisch skizziert. Die Beispielfragen zur Metakognition wurden im Wahlmodul 134, 2019 in Gruppen und später im Plenum entwickelt. Weitere Beispiele von Fallstudien sind in Schreiner (2016), Capiaghi (2018) sowie Plüss (2019 in Vorb.) dargestellt.

Anschliessend an die Denkschulung könnten die Kinder Übungsblätter durcharbeiten und zur Belohnung (im Sinn des impliziten Lernens) Eile mit Weile oder ein anderes Gesellschaftsspiel spielen, wie es ihnen gefällt, so auch im «Eile-mit-Weile-10-er-Land», in dem nur die «Zehnerzahlwörter» gesprochen werden dürfen, usf. Die Lehrpersonen sollen auch mitspielen.

Übersicht über die Episoden zum Erweitern von Aussagen (Gleichungen)

Lektionen für die Denkförderung finden einmal pro Woche statt, sie sind in England für alle neun Volksschulstufen und den Kindergarten entwickelt worden. Bestimmte Themen der Denkschulung werden in Gruppen von Episoden behandelt. Die Website gibt es auch in einer Übersetzung:

https://de.wikipedia.org/wiki/Kognitive_Akzeleration

Pro Lektion werden nach einer konkreten Vorbereitung ca. 2-3 Episoden angeregt und durchgeführt. Am Anfang übt man am besten nur mit einer Episode, welche durch die Lehrperson moderiert wird. Jede Lektion wird mit einer metakognitiven Aufgabe sowie dem vernetzenden Ausblick (Bridging) abgeschlossen. Alle Lektionen sind von einer Autorengruppe etwa zu 80% vorbereitet und erprobt worden. Dieses Prinzip hat sich auch in den Fallstudien an der HfH bewährt. – Hier wird ein Teilbereich des Erweiterns von Gleichungen um den Faktor 10^n, wobei n ≥ 1 ist in einer CA-Lektion vorgestellt.

Ressourcen	Sprache (mündlich, schriftlich), Wortschatz
• Würfel • Punktefelder (Zehner, Zwanzigerfeld, Zehnerstriche) • Kärtchen • A3 Blätter • Schreibzeug (Filzstifte, 2 Farben)	Name der Anzahl der Würfelpunkte und Plättchen, Zehner, Zwanzigerfeld, addieren, zwischen, insgesamt, Teile, das Ganze, weniger, mehr, gleich viele, 10-Mal grösser, 100-Mal grösser, zuordnen, Zahlen schreiben, einstellige Zahlen, zweistellige Zahlen, mehrstellige

	Zahlen, vergleichen, vervielfachen, Term, Gleichung,

Die Thematik wird mit dem Lehrplan und mit entwicklungspsychologischen Grundlagen abgeglichen. Das wird in einer Tabelle zusammengefasst, die erst schematisch vorgestellt wird.

Tabelle 3

Vorlage für die Synopse zwischen dem Lehrplan, der Denkschulung, der Entwicklungspsychologie

Zyklus	Zahl und Variable	Episoden Denkschulung	Entwicklungspsychologie*
1	Darstellungen von Zahlen Darstellung der Addition Vom Zwanziger- in den Hunderterraum Rechengesetze: kommutativ, assoziativ		Intramorphisches Niveau (präoperativ) Nur Relationen zwischen beobachtbaren Zuständen. 5-6 J.
			Intermorphisches Niveau (konkrete Operationen) Systematische Koordination von Korrespondenzen (Plättchen, Zahlen, Stellenwerte), v.a. beobachtbare Zustände u. Ereignisse 6-10 J.
	Dezimales Stellenwertsystem, bündeln, entbündeln		
2			
			Transmorphisches Niveau Ablösung von den sichtbaren Zuständen und Vorgängen. Abstraktes operatorisches, kognitives System wird ausgebildet. Algebra. Ab 11 J.
3			

*Morphismustheorie, siehe Blanchet & Valladao (1990), Kvašek (2003).

Episode 1: Verschiedene einstellige Summanden bestimmen und die entsprechenden Darstellungen enaktiv mit Plättchen oder ikonisch mit Kreisen (und anderen Symbolen für die Zehner und Hunderter, etc.) herstellen sowie symbolisch darstellen, Summen bilden und Aussagen machen. Gleichzeitig sollen Aussagen abgeleitet werden, welche um den Faktor 10, 100 oder 1 000 und grösser erweitert, dargestellt und symbolisiert worden sind.

In dieser Episode werden die Kinder in die Thematik eingeführt, und sie setzen sich im Sinne von Erkundungen mit der Thematik auseinander. Laufend werden Ausdrücke modelliert und ko-konstruktiv angewendet und gleichzeitig von der Lehrperson gelobt und präzise paraphrasiert. Die

Ausdrücke betreffen die Anzahl der Würfelpunkte und Plättchen, den Zehner (er kann auch als grosser Strich dargestellt werden), Zwanzigerfeld (das auch als zwei grosse Striche dargestellt werden kann), addieren, zwischen, insgesamt, Teile, das Ganze, weniger, mehr, gleich viele, 10-Mal grösser, 100-Mal grösser, zuordnen, Zahlen schreiben, einstellige Zahlen, zweistellige Zahlen, mehrstellige Zahlen, vergleichen, vervielfachen, Term, Gleichung, Ungleichung.

Die Freude am Darstellen wird gepflegt und im Feedback bestätigt. Dargestellt werden Terme, welche z.B. mit Würfeln und Regeln (Mal 10 etc.) oder über die freie Wahl erzeugt werden. Für diese Terme werden Kardinalzahlen gesucht und in wahre Aussagen (Gleichungen) überführt. Neugier, Ermutigung und Lob bestimmen das Klima. Die Verwandtschaft der Verhältnisse (Vervielfachung) wird geprüft und erprobt. Allfällige kognitive Konflikte werden von den Lehrpersonen aufgegriffen, aber von den Kindern untersucht und geklärt.

Episode 2: Warum bekommen Zahlen mehr Stellen, wenn von der 9 zur 10 oder von der 19 zur 20 usf. fortgeschritten wird? – Mehrstellige Zahlen und das dezimale Stellenwertsystem

Die Erfahrungen der Episode 1 werden in der Concrete Preparation aufgegriffen und auf grössere Zahlen erweitert. Zuerst könnte die Umtauschmöglichkeit beim Belohnungssystem thematisiert werden: 10 Sonnen ergeben 1 Edelstein, die Sonnen verwandeln sich in einen Edelstein mit dem Wert bzw. der Bedeutung von 10 Sonnen. Mit Hilfe des Schulabakus (vgl. Johann, 2002, siehe http://www.schulabakus.de/ [15.06.2019]) wird erläutert, was passiert, wenn der Schritt von 9 zu 10 Plättchen symbolisch dargestellt wird. Oder eben, wenn aus 10 Sonnen in einen Edelstein umgewandelt werden. Danach experimentieren die SuS ko-konstruktiv mit mehrstelligen Zahlen ihrer Wahl. Sie können Plättchen oder Sonnen als Basismaterial nehmen, oder diese wie bei Johann (2002) durch Striche auf den Stellenwertkarten symbolisiert werden. Die Zifferndarstellung wird ebenfalls integriert.

Episode 3: Was passiert in Gedanken, wenn kleine und grosse Zahlen zusammengezählt werden (3+4+30+40) und was passiert beim Schreiben?

In der Episode 3 addieren die SuS Einer- und Zehner- oder auch 100er-Zahlen. Die Episode greif die Erfahrungen mit den Darstellungen, siehe Abb. 14 auf. Doch nun schulen sie ihr Denken an der Addition von Einerzahlen sowie von Zehner- und oder Hunderterzahlen, die zuvor verzehnfacht oder verhundertfacht worden sind. Auch hier stehen verschiedene Darstellungsformen zur Verfügung: die Plättchen, das Hunderterfeld, der Schulabakus (vgl. Johann, 2002, siehe http://www.schulabakus.de/ [15.06.2019])

Detailplanung einer Denkschulung

Episode 1: Alle möglichen Muster mit drei Gruppen à 4 gleiche Münzen herstellen

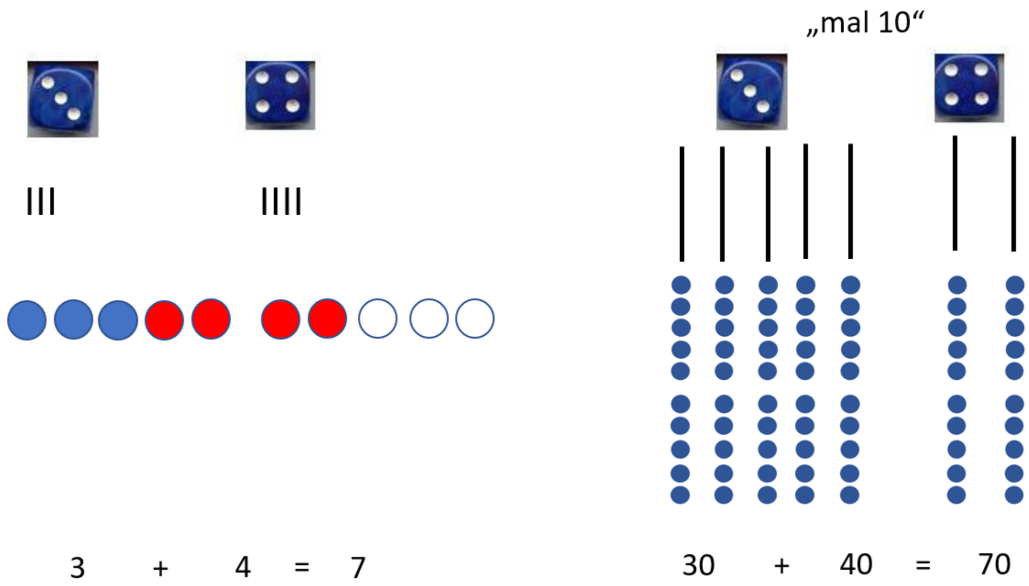


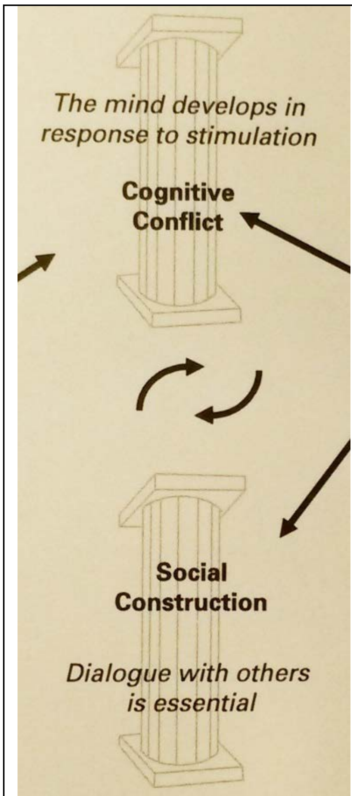
Abbildung 14': Darstellung und Erweiterung der Punkte, Zahlen und Aussagen

Bei der konkreten Vorbereitung der Klasse wird die Darstellung in Abbildung 2 vorgestellt (am Boden oder am Beamer).

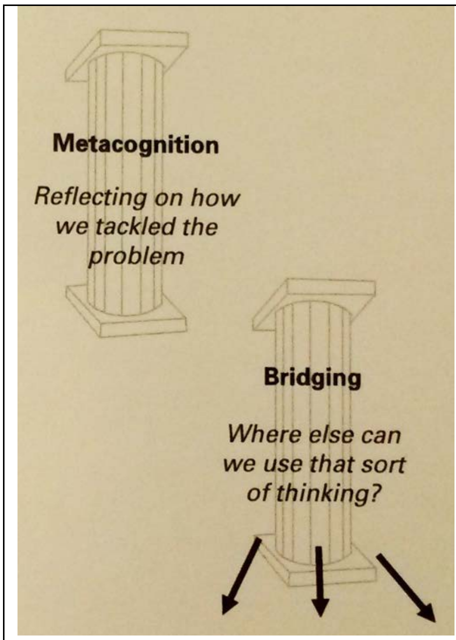
	Konkrete Vorbereitung mit einer ganzen Klasse Die KLP und die SHP teilen die Klasse in Vierergruppen ein. Die Arbeitstische werden eingerichtet. Sie hat sowohl eine Videokamera postiert als auch einen Fotoapparat organisiert, mit denen einzelne Szenen aufgenommen werden können. Die SHP oder die KLP führt die Kinder in die Aufgabensituation ein. Sie kann eine Begebenheit aus dem Alltag oder dem Schulunterricht in Erinnerung rufen oder die folgenden Worte an die Gruppe richten. Sie beruhen auf einer wahren Begebenheit: „Ich hatte euch neulich zugehört, wie ihr nach der Pause miteinander gezählt habt, es freute mich, wie ihr schon im Hunderter weiterzählen konntet, aber auch, wie ihr z.B. in Zehnerschritten oder in Hunderterschritten vorwärtsgekommen seid. Kompliment. Als ich an das Arbeitsblatt dachte, mit dem wir heute üben werden, ist mir eine Denkaufgabe in den Sinn gekommen, die wir im Voraus miteinander anschauen könnten. Seid ihr interessiert daran? Die LP legt das Material wie in Abbildung 8 dargestellt vor die Klasse. Dazu sagt sie: Ich habe links zwei Würfel, mit 3 und 4 Punkten. Wenn ich das mit Plättchen

	darstelle und die Punkte immer in Fünfergruppen ordne, so ergibt es das folgende Bild. – Und da kommen eure Zehnerschritte von eben ins Spiel. Ich nehme wieder den Dreierwürfel und denke mir, dass das zehn Mal mehr wäre, nämlich dreissig. Da lege ich also 3 Zehner hin. – Was muss ich mit dem Viererwürfel machen? …Ja, ich gehe ähnlich vor, ich nehme nun vier Zehner, was zehn Mal mehr ist als 4. Zusammen macht das 10, 20, …… 70. – So könnten wir nun darunterschreiben: 3+4=7 und 30+40=70. Exkurs: Einführungen in eine Thematik können auch mittels *Rollen- oder Phantasiespielen* geschehen. Sie inszenieren nicht nur das Denken über einen Gegenstand, sondern auch die *Emotionen* (vgl. Cuomo, 2007; Imola, 2010).

Lass die Kinder <u>1-2 Möglichkeiten</u> durchspielen. Z.B. 2+2=4, so sind 20+20=40. Kontrolliere, wie die Gruppen den Auftrag verstanden haben. Vielleicht erinnern sich einzelne Kinder an die Belohnungssterne, bei denen 10 einzelne Sterne in einen Edelstein umgetauscht werden können. Lobe diese Gehversuche.

	Die Kernfragen der Episoden oder ev. der kognitiven Konflikte, welche sich im Vorfeld ereignet haben, werden zu Beginn der Episoden vorgestellt. **Gruppenarbeit (ko-konstruktiv)** In der 1. Episode sollen die Gruppen enaktiv alle möglichen Mengenverhältnisse aufstellen und fotografieren (oder auf einem Blatt nachzeichnen, das wären ikonische Darstellungen). Auftrag: Erfindet Paare von Würfelaugen und bildet die Summe davon. Im zweiten Schritt vervielfacht ihr die Würfelanzahl mit 10 oder 100 oder auch 1 000 und legt, zeichnet und schreibt es daneben. Auch hier sollt ihr wieder die Summe bilden. <u>Versucht alle Möglichkeiten</u> zu erfinden (und fotografiert / oder) zeichnet sie und schreibt sie auf). » «Fragt euch selbst immer wieder, wie ihr herausfindet, ob ihr alle möglichen Verhältnisse und Vervielfachungen erkannt habt.» Die Gruppen diskutieren untereinander und arbeiten Lösungsmöglichkeiten heraus. Die LP beobachten die Tätigkeiten, loben den Erfindergeist der Gruppen und wiederholen Kerngedanken der Aufgabe. **Klassendiskussion und Gruppen-Präsentationen** Nach 10-15 Minuten Gruppen-Arbeitszeigt erfolgt eine Phase des *Sharings mit der ganzen Klasse*<u>. Es ist untersagt, mit «richtig» oder «falsch» zu beurteilen, dadurch würde die Denkschulung korrumpiert und in eine einfache Ausrechenstunde herabgestuft.</u> Dabei wird nach den folgenden Erfahrungen gefragt: - Wie viele Möglichkeiten vervielfachter Aussagen sind entwickelt worden?

- Wer hat die Muster gelegt?
- Wer hat die Muster gezeichnet und beschriftet?
- Bitte die Kinder, an der Wandtafel zu zeigen, mit welchen Methoden / Gedankengängen sie die Abbildungen und Vervielfachungen herausgefunden hatten.
- Gehe im Lehrgespräch oder in ganz kurzen Murmelgesprächen den Lösungen nach, in denen nicht alle Möglichkeiten herausgefunden worden waren.
- Fokussiere auf den Wert von systematischen (z.B. 2+2; 4+4, 8+8) Lösungsversuchen. Lass sie von den Kindern erklären.
- Lobe grosszügig.
- Fordere immer wieder zur kommunikativen Validierung von Einsichten heraus: «Wir haben eben das und das gehört, überlegt in euren Gruppen, weshalb das wahr sein muss, oder weshalb es eventuell nicht wahr ist.»
- Schäle offene Fragen oder kognitive Konflikte heraus.



Metakognition
Nach Abschluss von 2 oder drei Episoden werden den Arbeitsgruppen metakognitive Fragen vorgelegt. Auf diese Fragen sollen sie gemeinsam Antworten erfinden. Im Fall dieser Einstiegserfahrung machen wir die metakognitive Runde schon nach einer Episode:

- Was hast du dir überlegt, dass es bei den Punkten und den Zahlen dasselbe gibt?
- Was musst du einem anderen Kind sagen, damit es die Verwandtschaft (Vervielfachung), den Zusammenhang, das Verhältnis zwischen den Einer-Punkten und den Hunderterkarten versteht? (Greife den Gedanken der Kinder auf und paraphrasiere in der Sprache der Mathematik: das Zehnfache…….; die Vervielfachung mal Zehn, ….
-

Zwischenbemerkung zum Thema von Vorurteilen: Wenn ich als LP das metakognitive Denken als Haltung nicht pflege, darf ich den Kindern das Nichtkönnen nicht in die Schuhe schieben. Konsultiere die Website von https://www.letsthink.org.uk/ Da können Beispiele aus dem Kindergarten betrachtet werden. – Du kannst das metakognitive Denken in den Anfangsphasen oder im Kindergarten auch spielen, d.h. mit einer Leitfigur oder mit der Stellenpartnerin dialogisch modellieren. Diese

	Rollen- oder Phantasiespielen inszenieren nicht nur das Denken über das Denken sondern auch die Emotionen. Zwischenbemerkung zum Thema der empirischen Abstraktion (vgl. Piaget, 1977a, b), das ist das Erzählen über das, was man gemacht hat: - <u>Welche Aufgabe war die Interessanteste, ist keine metakognitive Frage</u>: aber: - erfindet Gedanken, die zeigen, weshalb eine bestimmte Aufgabe die interessanteste war. - Woran muss ich denken, wenn ich begründen muss, weshalb eine Antwort wahr ist oder nicht? <u>Wichtig: nie «richtig» - «falsch» sagen, sondern die Wahrheit und die Eleganz der Antworten loben!</u> Zu guter Letzt hält man Ausschau auf nächste Denkschulungen, das ist **das Bridging**, d.h. das Brücken bauen (vgl. Adey, 2008). Wo könnte man diese Art ein Problem zu lösen und darüber nachzudenken sonst noch gebraucht werden? Was habt ihr sonst schon über grosse Zahlen diskutiert? Was wäre wohl, wenn wir die Einerzahlen mit den Zehner- oder den Hunderterzahlen zusammentun würde (7 + 70)? Kurze Gruppendiskussion, danach Sharing in der Klasse. Abschluss der Episode 1 Ggf. Weiterarbeit mit dem Übungsblatt und danach eine Spielphase Eile mit Weile o.ä.

6 Entwicklungsfragen für Unterrichtsprojekte oder Masterarbeiten

Je nach Entwicklungsinteresse können verschiedenste Entwicklungsfragen abgeleitet und kombiniert werden. Ich umschreibe zuerst eher eine allgemeine, dann folgen spezifischere Entwicklungsfragen.

Wie wirkt sich der Einsatz des „Eile mit Weile" in Spielstunden und in der Mathematik auf die Entwicklung der mathematischen Kompetenzen von Kindern │im Kindergarten – in der Unterstufe – in der Mittelstufe – in der Oberstufe │bei Lernbehinderung aus?

Detailliertere Themen:

Von elementaren Zählwortreihen zu stabilen Zahlbegriffen beim Eile mit Weile (oder andern Würfelspielen).

Von stabilen 1:1 – Korrespondenzen zwischen Würfelzahlen und Spielfeldern zu strukturierten Korrespondenzen von Zahlenmengen >1.

Lohnt es sich, das Halbieren und das Verdoppeln oder andere Operationen im Sinne von Erweiterungen der Spielregeln zu integrieren? Gewinnen die Kinder dabei Gewandtheit im Zahlenwissen und im Beziehungswissen der Zahlen im Hunderterraum?

Spielerfahrung und Arithmetisierung: Wie entwickelt sich die symbolisierte Darstellung von Operationen auf der Grundlage des Eile mit Weile? Aufbau der mündlichen und schriftsprachlichen Kompetenz über das numerische und das alphabetische Symbolsystem.

Wie entwickelt sich die Korrespondenz zwischen den Spielerfahrungen des Eile mit Weile und dem Zahlenstrahl?

Welchen Einfluss üben Spielregeln auf das Verständnis von Zahlen aus, wenn die Menge der gewürfelten Punkte verzehnfachen, verhundertfachen, vertausendfachen wird und die Bedeutung der Spielfelder den Spielregeln angepasst worden ist (1 Feld bedeutet 10; 1 Feld bedeutet 100; usf.)

Welchen Einfluss hat die Kognitive Akzeleration auf die Entwicklung der Wechselwirkungen zwischen den Spielerfahrungen mit dem Eile mit Weile und dem Mathematisieren im Zyklus 1?

Was kann mit dem Eile mit Weile an anwendungsorientierter Mathematik gestärkt werden?

Wie lässt sich die Kompetenz im Sachrechnen auf der Basis von mathematisierten Spielerfahrungen fördern?

Wie entwickelt sich das Verständnis im Übergang von den natürlichen zu den rationalen Zahlen auf der Basis der Spielerfahrungen mit dem EmW (16 Spielfiguren für 4 Spielende $\leftrightarrow \frac{16}{16}$ für 4 Spielende)?

Die Entwicklungsannahmen lauten:

Das Zählen und das Wissen über das Zählen werden gewandter (Sichere Zählwortreihe, Mengenbegriffe, 1:1).

Das Zählen und das Wissen über Zahlen werden noch gewandter, wenn das Spielen und die Mathematisierung mittels Metakognition durchgearbeitet werden.

Das strukturierte Zählen wird gewandter, indem Mengen immer geschickter in Teilmengen unterteilt werden können (Distributivgesetz, Kommutativgesetz).

Das gestützte und das abstrakte Operieren mit Zahlen (Addition, Subtraktion) werden gewandter.

Das Problemlösen und das Erforschen-können von Spielabläufen werden auch gewandter.

Das Beweisen wird praktisch angewendet und mathematisch verfeinert.

Das Kommunizieren über Zahlenverhältnisse und Operationen wird kompetenter, wenn die Kinder ein bedeutungsvolles Spielgerät oder Arbeitsmittel zur Verfügung haben.

Elementare statistische Kompetenzen werden auch erworben.

Der Kompetenzaufbau im Umgang mit Symbolsystemen ist dynamisch und vernetzt (die Mündlichkeit der Kommunikation, die Mündlichkeit des Zählens und Operierens, das alphabetische Symbolsystem und das numerische Symbolsystem).

Das EmW ist nicht nur für den Umgang mit natürlichen Zahlen mit Null *(N_0)* von Bedeutung, sondern auch eine wertvolle Erfahrungsgrundlage für das Verständnis von Bruchzahlen und Operationen mit Brüchen.

7 Planungsfragen

Die folgenden Tabellen möchten die Integration von Spielen als Teil des ganzen Mathematikunterrichts erleichtern.

Tabelle 4

Quartalsplanung zu den Bausteinen des Mathematikunterrichts

Dimensionen	DIN Woche	DIN Woche	DIN Woche	DIN Woche	DIN Woche
Entwicklung: Denken, Handeln, Erleben	Spielkulturen kennen lernen Differenzierung der Interessen, Differenzierung der sozialen Regeln				
Inhalte generativ und Lehrplan	Spielgruppen bilden Lernbereiche aufeinander abstimmen u.U. Spiele einführen	Zählwort reihe bis 36		Zählwortr eihe bis 76	
Handlungs-aspekte der Mathematik	nn				
Produktives Üben	nn				
Automatisieren / Abfragen	nn				
EmW und kognitive Akzeleration	1 Lektion (L) bzw. Episode pro Woche	1 L / W.	1 L / W.	1 L / W.	1 L / W.

In Tabelle 4 sind die Aspekte des Mathematikunterrichts offen formuliert, dass sie auch für die Vorstufe eine ganzheitliche, zielorientierte und lebensweltorientierte Mathematikdidaktik thematisieren helfen. Es geht also darum, dass man alle Aspekte von der Entwicklungsorientierung, der Denkschulung bis zum Automatisieren und Abfragen stufengemäss umsetzt (vgl. Meyer, 2017).

Tabelle 5

Wochenplanung von Ritualen zur Förderung im Mathematikunterricht

MO	DI	MI	DO	FR
Mathematik	Mathematik	Mathematik	Mathematik Denkschulung	Mathematik
Spiel		Spiel		Spiel
			Projekt	
			Projekt	

Tabelle 5 verdeutlicht eine offene und ritualisierte Wochenplanung mit Spielzeiten. Die Denkstunden dienen der kreativen und ko-konstruktiven Auseinandersetzung mit mathematischen oder sozialen Fragen (vgl. Adey, 2008). In den Projektstunden werden Spielerfahrungen und Fragen in deren Zusammenhang mathematisch erforscht, erörtert und dargestellt. Die regulären Mathematikstunden dienen der gewohnten Arbeit an den Lernzielen gemäss dem Lehrplan und den offiziellen Lehrmitteln. Dies soll so normal und einfach wie möglich geschehen. Der Mut zum Spielen wird als Indikator einer selbstbestimmten Pädagogik angesehen (vgl. Pichon-Rivière, 2003).

8 Schlussgedanken

Es geht um Bildung, in der die Welt- und Spielerfahrungen als Ressource für eine bedeutungsvolle Mathematisierung integriert werden (vgl. Freudenthal, 1991; Gruschka, 2011). Arithmetik wird dabei als Prozess und als Mittel der Erschliessung dieser Erfahrungen aufgefasst.

Der Stoffdruck kann unheimlich auf Lehrpersonen lasten (Lenné, 1969; Wagenschein, 1999). Aus der Sicht der kritischen Pädagogik wird als als rauer Wind der Transmissionsdidaktik (vgl. Wink, 2011) bezeichnet. Die Integration von Spielen und von Phantasie in den alltäglichen Unterricht wird wie eine Behinderung des eingespielten Betriebes angesehen. Daneben weisen Forschungen seit Jahrzehnten auf die inhaltlichen, sozialen und kulturellen Werte und Vorteile hin (vgl. Heimlich, 2015; Kamii, 1985, 2004; Kamii & Anderson, 2003).

Es irritiert vielleicht, dass empfohlen wird, die Kinder nicht mit Arbeitsblättern über das Eile mit Weile einzudecken. *Auf diesen Reflex sollte die Lehrperson verzichten lernen*. Der Reflex ist jedoch ein wichtiger Indikator, dass das Lehrerverhalten, die Wahrnehmungen und Reflexionen immer noch von der Logik der Transmissionsdidaktik durchdrungen sind.

Wenn die Lehrperson die Kinder und sich selbst besser beobachtet und aktiver hinhört, dann entstehen sehr viele bedeutsame Bezugspunkte und Stoffe, welche der Lehrperson beim Vorbereiten von mathematischen Konferenzen helfen. Sie befähigt sich dadurch, die Entwicklungsprozesse der transformativen Pädagogik mit Hilfe der Projektmethode (vgl. Frey, 2010) und des flexiblen Interviews zu steuern und zu gestalten. Der Einsatz von Moderationstechniken gibt der Lehrperson Sicherheit in der Führung der Lernprozesse. – Vielleicht ist man am Anfang etwas mutlos, oder man zweifelt an der Wirksamkeit dieser Methode. Es kann hilfreich sein, wenn man sich zu Beginn beraten lässt von Kolleginnen und Kollegen, welche mit dieser Methode Erfahrungen gemacht haben. Ähnliche Wirkung können durch die Supervision im Zusammenhang mit der Aktionsforschung erzeugt werden (vgl. Imola, 2010).

Kreativität ist nicht dasselbe wie «kreatives Kopieren». Originäre Kreativität von Lerngruppen und deren Lehrpersonen wird über *die Ressourcenorientierung und die systemische didaktische Analyse* entdeckt und erkannt. Kinder im Kindergarten können schreiben, sie erfinden auch Symbole für das, was sie verschriftlichen möchten. Dies haben Sinclair, Mello & Siegrist (1988) oder Unterrichtsprojekte (Schnyder, 2008; Zinniker, 2010; Schlienger, 2018) eindrücklich belegen können. Diese Prozesse zu beschreiben und aus ihnen erkenntnisleitende Fragen für den weiteren Verlauf der Mathematikstunden abzuleiten, trägt zur Kunst des Mathematik-Unterrichtens bei. Diese Kunst lebt von den Ressourcen der Lernenden und von den immer wiederkehrenden Dialogen über die Einsicht und das Nichtwissen.

Mit der Zeit können die Kinder über die Frage: „Was wäre, wenn….“ Probleme abstrakt formulieren und einer Lösung zuführen. Dies wäre der Indikator für elaborierte Entwicklungen der abstrakteren mathematischen Kompetenzen. Sie würden Zahlenkünstler spielen, welche irgendwo im Schatten liegen und mit geschlossenen Augen über mathematische Objekte nachdenken und austauschen.

Spielen und Mathematisieren sind Erfahrungen, Entwicklungshelfer und Gradmesser der mathematischen Bildung und der Erziehung.

Literatur

Adey, P. (Hrsg.). (2008). *Let's Think! Handbook. A Guide to Cognitive Acceleration in the Primary School*. London: GL assessment.

Alvarado, M., Ferreiro, E. (2002). Four-and five-year old children writing two-digit numbers. *Journal of Applied Psycholinguistics, 2*(3), 23-37.

Anthony, G. J., Walshaw, M. A. (2004). Zero: A "None" Number? *Teaching Children Mathematics*, 38-42.

Baroody, A. J. (1988). Mental-Addition Development of Children Classified as Mentally Handicapped. *Educational Studies in Mathematics, 19*(3), 369-388.

Baroody, A. J. (1999). The Roles of Estimation and the Commutativity Principle in the Development of Third Graders' Mental Multiplication. *Journal of Experimental Child Psychology, 74*(3), 157-193.

Bialystok, E., Codd, J. (2000). Representing quantity beyond whole numbers: Some, none, and part. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale, 54*(2), 117-128.

Blanchet, A. Valladao, E. (1990). Comparaison de deux machines et de leurs régulateurs. In J. Piaget, G. Henriques, E. Ascher (Hrsg.), *Morphismes et Categories*. Lausanne: Delachaux & Niestlé, S167-181.

Brenner, C. (1993). *Praxis der Psychoanalyse*. Frankfurt a.M.: Fischer Taschenbuch Verlag.

Brenner, C. (1999). *Grundzüge der Psychoanalyse* (20. Auflage). Frankfurt a.M.: Fischer.

Capiaghi, M. (2018). *Denkschulung stärkt alle. Kognitive Akzeleration in motivierenden Themen der Schulmathematik*. Masterarbeit. Zürich: Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik. Verfügbar unter: https://recherche.nebis.ch/primo-explore/fulldisplay?docid=ebi01_prod011299397&context=L&vid=NEBIS&search_scope=default_scope&tab=default_tab&lang=de_DE [10.10.2018]

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

Frege, G. (2001). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Stuttgart: Philipp Reclam jun.

Freire, P. (1979). *Pädagogik der Unterdrückten*. Reinbek b. Hamburg: Rowohlt.

Freud, S. (1993). *Zur Psychopathologie des Alltagslebens*. Frankfurt a.M.: Fischer Taschenbuch Verlag.

Freudenthal, H. (1977). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (2., durchgesehene Auflage, Bd. 1 und 2). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gerster, H.-D., Schultz, R. (2000). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht: Bericht zum Forschungsprojekt „Rechenschwäche - Erkennen, Beheben, Vorbeugen".* Verfügbar unter: http://www.freidok.uni-freiburg.de/volltexte/1397/ [25.04. 2006].

Ginsburg, H.P. (1987). Assessing Arithmetic. In D.D. Hammill (Ed.), *Assessing the abilities and instructional needs of students* (S. 441-523). Austin: pro-ed.

Gruschka, A. (2011). *Verstehen lehren. Ein Plädoyer für guten Unterricht*. Stuttgart: Philipp Reclam.

Piaget, J. (1977a). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. 1. L'abstraction des relations logico-arithmétiques.* (Études d'épistémologie génétique) (Band 1). Paris: Presses universitaires de France.

Piaget, J. (1977b). *Recherches sur l'abstraction réfléchissante. 2. L'abstraction de l'ordre des relations spatiales* (Bände 1-2, Band 2). Paris: Presses universitaires de France.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E., Wittich, C. (2013). *Ablösung vom zählenden Rechnen*. Seelze: Kallmeyer.

Heimlich, U. (2015). *Einführung in die Spielpädagogik* (3., aktualisierte und erweiterte Auflage.). Bad Heilbrunn: Verlag Julius Klinkhardt.

Hirblinger, H. (2011). *Unterrichtskultur* (Vol. Band 33, Psychoanalytische Pädagogik). Giessen: Psychosozial.

Holzkamp, K. (1985). Selbsterfahrung und wissenschaftliche Objektivität: Unaufhebbarer Widerspruch? . In K.-H. Braun, Holzkamp, K. (Hrsg.), *Subjektivität als Problem psychologischer Methodik* (S. 16-36). Frankfurt a.M.: Campus.

Johann, M. (2002). Pumucklzahlen am Abakus. Einsatz des Abakus beim Aufbau des Zahlbewusstseins und des Zahlwortschatzes (Zahlenräume entdecken / Geometrie). *Grundschulunterricht*, (6).

Kamii, C. (1985). *Young Children Reinvent Arithmetic*. New York: Teachers College Press.

Kamii, C. (2004). *Young Children Continue To Reinvent Arithmetic. 2nd Grade* (2nd ed). New York: Teachers College Press.

Kamii, C., Anderson, C. (2003). Multiplication Games: How We Made and Used Them. *Teaching Children Mathematics, 10*(3), 135-141.

Kaplan, R. (2004). *Die Geschichte der Null* (2. Aufl.). München: Piper.

Klafki, W. (1996). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Zeitgemässe Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik* (5. Auflage). Basel: Beltz Verlag.

Kolb, N. (2008). *Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht.* Unveröffentl. Unterrichtsprojekt, Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik, Zürich.

Konold, C., Higgins, T.L. (2003). Reasoning About Data. In J. Kilpatrick, Martin, W.G., Schifter, D. (Hrsg.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (S. 193-215). Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Kvašek, M. 2003). Piaget's „Neue Theorie". *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, 50, S. 221-234.

Lenné, H. (1969). *Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Levenson, E. (2013). Exploring one student's explanations at different ages: the case of Sharon. *Educational Studies in Mathematics, 83*(2), 181-203.

Mannoni, B. (1978). Mathe-Unterricht - Man ist schliesslich nicht zum Spass da! In M. Mannoni (Hrsg.), *Ein Ort zum Leben. Die Kinder von Bonneuil* (S. 80-99). Frankfurt a.M.: Syndikat.

Meyer, S. (2007). *Kommt, wir jassen und mathematisieren* (S. 95). Unveröffentlichtes Manuskript. Hochschule für Heilpädagogik, Zürich.

Meyer, S. (2017). Mathematik-Kurz-Test (MKT) 1-9. Flexible Interviews und Blitzrechnen (FI-B). Internet. Zugriff am 15.9.2017. Verfügbar unter: https://www.hfh.ch/de/unser-service/shop/produkt/mathematik_kurztest_mkt_19

Moser Opitz, E. (2001). *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen*. Bern: Haupt.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche / Dyskalkulie*. Bern: Haupt-Verlag.

Oerter, R. (2012). Lernen en passant: Wie und warum Kinder spielend lernen. *Diskurs Kindheits- und Jugendforschung(4), 389-403.*

Piaget, J., Henriques, G., Ascher, E. (Hrsg.). (1990). *Morphismes et Catégories. Comparer et Transformer*. Lausanne: Delachaux et Niestlés.

Pichon-Rivière, E. (2003). *El proceso grupal: del psicoanálisis a la psiocologia social I* (2a ed.). Buenos Aires: Nueva Visiòn.

Radatz, H., Schipper, W. (1983). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen*. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag.

Radatz, H., Schipper, W., Dröge, R. (1998). *Handbuch für den Mathematikunterricht, 2. Schuljahr*. Hannover: Schroedel.

Rothko, M. (1947). *Mark Rothko*. Wikipedia. Zugriff am 20.12.2015. Verfügbar unter https://de.wikipedia.org/wiki/Mark_Rothko

Ruf, U., Gallin, P. (1990). *Sprache und Mathematik in der Schule*. Zürich: Verlag Lehrerinnen und Lehrer Schweiz.

Schipper, W. (2005). *Mathematik. Modul G 4: Lernschwierigkeiten erkennen - verständnisvolles Lernen fördern.* Verfügbar unter: http://www.sinus-an-grundschulen.de/index.php?id=113 [12.03.2011]

Schlienger, D. (2018). *Förderung der Literacy im Kindergarten mit Hilfe des Rollenspiels und der Alphabetisierungsmethode nach Paulo Freire*. Unveröffentl. Praxisprojekt. Zürich: Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik.

Schmidt, R. (1982). Ziffernkenntnis und Ziffernverständnis der Schulanfänger. *Die Grundschule, 4*, 166-167.

Schreiner, C. (2016). *Spielend denken, denkend spielen. Mathematisches Spielprojekt zum Themeninhalt „Geld“.* Unveröffentl. Praxisprojekt. Zürich: Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik.

Siegler, R. S., Ramani, G. B. . (2009). Playing linear number board games—but not circular ones—improves low-income preschoolers’ numerical understanding. *Journal of Educational Psychology, 101*(3), 545-560.

Sinclair, A., Mello, D., Siegrist, F. (1988). La notation numérique chez l'enfant. In H. Sinclair (Hrsg.), *la production de notations chez le jeune enfant* (S. 71-97). Paris: Presses universitaires de France.

Textor, M.R. (2000). Lew Wygotski – der ko-konstruktive Ansatz. In E.W. Fthenakis, M.R. Textor (Hrsg.), *Pädagogische Ansätze im Kindergarten* (S. 71-83). Weinheim: Beltz.

Wagenschein, M. (1999). *Verstehen lehren*. Weinheim: Beltz Verlag.

Wiese, H. (1996). *Zahl und Numerale. Eine Untersuchung zur Korrelation konzeptueller und sprachlicher Strukturen. Humboldt-Universität, Berlin.*

Wiese, H., Wiese, I. (1998). „Zwei Dreiviertelstunden sind kürzer als zwei drei Viertel Stunden.“ Interdisziplinäre Überlegungen zur Problematik von Bruchzahlen, Zahlwörtern und Bruchzahlkonzepten. *Journal für Mathematik-Didaktik, 19(2-3), 220-237.*

Wiese, H. (2004). Sprachvermögen und Zahlbegriff – zur Rolle der Sprache für die Entwicklung numerischer Kognition. In P. Schneider, Wedell, M. (Hrsg.), *Grenzfälle. Transformationen von Bild, Schrift und Zahl (S. 123-145). Weimar: VDG.*

Wilson, P. S. (2001). Zero: A special case. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 300-303.
Wink, J. (2011). *Critical pedagogy : notes from the real world* (4th ed.). New Jersey: Pearson Education.
Wittmann, E. Ch., Müller G. N. (1990). *Handbuch produktiver Rechenübungen* (Band 1). Stuttgart: Klett, S. 17-18 und 168 (Kopiervorlage).

Wubbels, T. (1997). Preparing teachers for realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(1), 1–28.
Zinniker, B. (2010). *Portfolioarbeit als Mittel zur Verbesserung der Arbeitshaltung (Unveröffentlichte Projektarbeit).* Zürich: Hochschule für Heilpädagogik.

Links

Auf der Lernplattform Ilias hat es in der Arbeitsbibliothek zur Mathematik eine reichhaltige Themen- und Aufsatzsammlung:

Spiele als Grundlage für das Mathematisieren. http://www.ilias-hfh.ch/goto.php?target=fold_30600&client_id=ilias-hfh.ch [29.12.2013]

„**Carrace**“ von Baroody und Gannon (1987) gibt es in einer übersetzten Version auf der Webseite des Flexiblen Interviews

Dog -
http://www.dogspiel.info/spiel.html

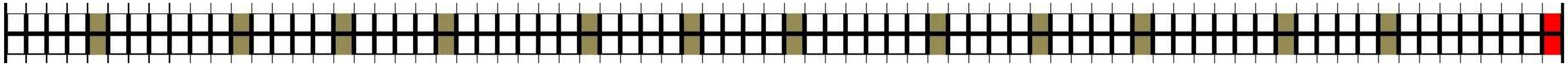
„Dog“ ist ein Spiel, das über das Eile mit Weile hinausgeht. Zwei Spieler versuchen, ähnlich wie beim Jassen als Team zu gewinnen. Das ist dann der Fall, wenn alle der insgesamt acht Figuren im Ziel sind. Der Zufallsfaktor durch Würfel kommt bei diesem Spiel nicht mehr vor. Jetzt sind Spielkarten im Einsatz, welche Kartenglück, Strategie und Taktik vereinen. Damit versucht man, die eigenen Figuren und diejenigen des Spielpartners optimal ins Ziel zu bringen.

Anhang

Beobachtungsbogen strukturiert…………………………………………………………………………

	Zählwortreihe	**Ordinalzahlen**	**Menge der Würfelaugen erfassen**			**Transfer der Menge auf die Spielfelder**		
			Zählkompetenz	Teil-Ganze-Relation: Menge strukturiert gebildet	Arithmetische Operationen	Zählkompetenz	Teil-Ganze-Relation: Menge strukturiert abrufbar	Arithmetische Operationen
Kompetenz ausgeprägt								
Kompetenz teilweise vorhanden								
Keine Kompetenz Unsicherheit								

Spielstreifen



Sach- und didaktische Analyse des EmW

EmW formalisieren → Zahlenstrahl

EmW als Modell

Spielregeln
Strategien, Taktiken
Transfer von Strategien (z.B. von logisch einfachen Beziehungen zw. Zahlen zu komplexeren Beziehungen)
Spielfeld und Zahlenraum vergrössern

Ordnen, Zuordnen
Zählen,
Zählen strukturiert,
Mengenbegriffe,
Operieren,
1+1
Rechengesetze
N, N_0, *Q*

Mathematisieren bedeutsamer Erfahrungen, mathematische Aussagen

Arithmetische Fertigkeiten

Kindergarten
Unterstufe

Forschendes Lernen am Phänomen EmW

Problemlösen

Fachdidaktische Dimensionen des Stoffes

Phänomene

Emotional:
Erfahrungen mit dem Spiel.
Gewinnen - verlieren

Lebensweltbezug
EmW als Spiel,
EmW als Arbeitsmittel
EmW als Projektionsfläche

Eile mit Weile

Entwicklungen beim Kind (operativ, d.h. bezüglich des Denkens und Tuns)

Bedeutsamkeit aus der Sicht der Lernenden

Sozial:
Spielgruppen zusammenstellen
Kommunikation

Konsequenzen für den Unterricht

Kognitiv:
Klären, wer das Spiel kennt.
Kläre, wie das Würfeln und Zuordnen klappt.
Zählstrategien und Zahlbegriffe klären.
Wortschatz, Pragmatik prüfen u. sichern

Spielpädagogik
Gruppenerfahrungen

Beobachtungsformen
Dokumentationsformen
(enaktiv, ikonisch, symbolisch)

Lernformen organisieren:
- Arbeitsformen für die Handlungsaspekte
- Differenzierte Übungsformen

Denkschulung in Gruppen, ko-konstruktiv
«Let's think», Cognitive Acceleratioin

Kreise bedeutsame Inhalte ein und verwende sie für die Zielanalyse. Förderdiagnostische, entwicklungspsychologische und fachdidaktische Tiefenanalyse könnten weiter erörtert werden.