Eine Anlage für die dialogische Diagnostik und Didaktik der Logik arithmetischer Operationen

(Berthoud & Kilcher (1987; übersetzt und kommentiert mit Fallbeispiel von Stefan Meyer, 2007 und 2019)

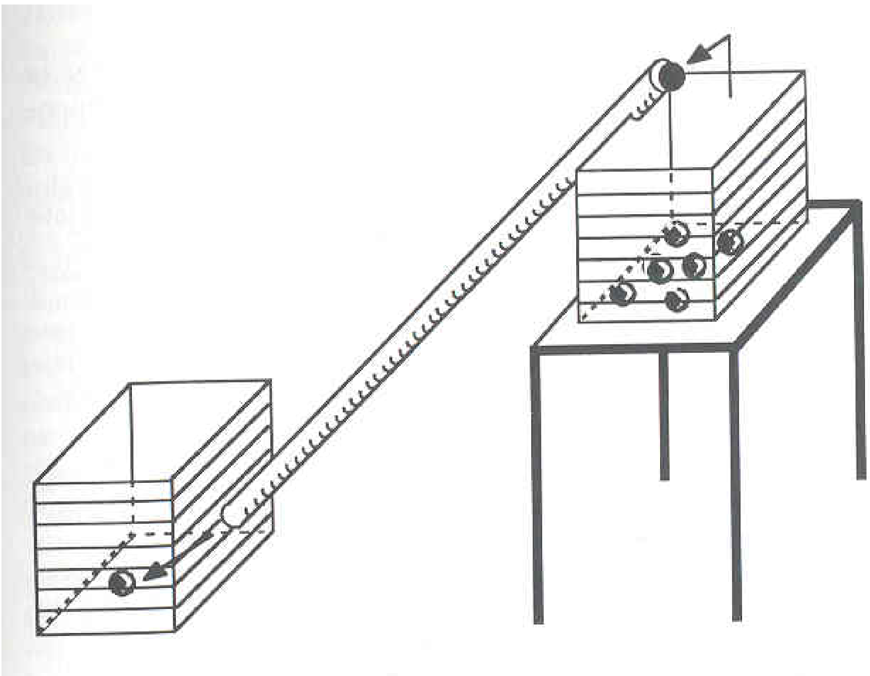

Abbildung 4: Der in den flexiblen Interviews verwendete Apparat (vgl. Berthoud & Kilcher, 1987, S. 59)
Man zeigt dem Kind alle 7 Kugeln (die Anzahl lässt sich variieren, siehe Abbildung 4), die man in die obere Schachtel legt. Eine Variante besteht darin, dass das Kind nur noch die untere Schachtel betrachten und auf die Fragen Antwort geben soll. „Hier liegt eine Kugel, wie viele sind dann noch oben?" „Wenn ich die 3. Kugel von 7 herunter gelassen habe, wie viele sind dann noch oben?" „Warte, bevor du die 4. Kugel herunterlässt. Wie viele hat es unten? Wie viele hat es oben?"

Die *Ordinalzahlen* bezeichnen die Reihenfolge des Herunterrollens für die 7 Kugeln.

Die *Kardinalzahlen* bezeichnen die Mengenverhältnisse, gesamthaft sind es hier 7, die Teilmengen variieren je nach Spielstand. Das lässt sich in der Gleichung symbolisieren: Anzahl Kugeln (unten) + Anzahl Kugeln (oben) = Anzahl Kugeln (gesamt). Die Terme beschreiben ganz bestimmte Spielstände im Verhältnis zur Gesamtzahl (der Kardinalzahl).

Können die Kinder diese *Mengenverhältnisse* (gesamthaft und in den Wechselwirkungen zu den Teilmengen oben und der Teilmenge unten) in ihren Operationen schon berücksichtigen? Wie stellen sie diese Mengenverhältnisse her? Welche dialektischen sowie logisch-arithmetischen Denkwerkzeuge stehen schon zur Verfügung? – Berthoud & Kilcher (1987) konnten bei den fünf- bis neunjährigen Kindern vier Entwicklungsniveaus beobachten. Der Entwicklungsverlauf zwischen dem Angewiesensein auf Anschauung und der Gewandtheit im Umgang mit reinen Vorstellungen ist spannend und faszinierend.

Kommentar zur Abbildung 4

Die spielerische Anlage lädt zum *Handeln* und *mentalen Operieren* ein. Die Gesamtmenge kann in den Experimenten variiert werden, entsprechend dem Niveau und dem Interesse der Kinder. Sie können die Menge selber bestimmen. Die *Fragen* zielen auf die Koordination und die Einsicht in Handlungen, in denen die Reihenfolge des Herunterrollens von Kugeln verknüpft ist mit den Fragen nach den Mengenverhältnissen zwischen den Teilen und der Gesamtmenge.

Beides, das Handeln und das Fragen provoziert Versprachlichung. Wenn man nach konkreten oder grafischen Darstellungen den Apparat zudeckt, fordert das die Vorstellungskraft zusätzlich heraus.

Ein weiterer Schritt betrifft den Aufbau und die Differenzierung der schriftlichen Darstellung (Zettelwirtschaft, Darstellungsformen (Zahlen, Pfeile, Tabellen u.a.), Erfinden von konkreten und fiktiven Aufgaben, Verständnis von Gleichungen, Algebra, siehe van den Heuvel-Panzhuizen, 2001).

Diese einfache und günstige Anlage trägt Wesentliches zu einem handlungsorientierten Lernen bei. Die Kinder haben die Möglichkeit, die Logik der Bedeutungen ihres Handelns permanent auf die Probe zu stellen und darüber zu diskutieren. Die Handlungen mit dem konkreten Apparat können mündlich, grafisch oder symbolisch dargestellt werden (van den Heuvel-Panhuizen, 2001).

Fallbeispiel: Lin, 4;5

Wir betrachteten die Abbildung 4 im eingescannten Originaltext. Lin zählte die 6 Kugeln am Boden der Schachtel. Danach zeichnete ich den Apparat auf ein Blatt, wobei sich in der oberen Schachtel nur 4 Kugeln befanden. Ich befragte sie zuerst zu einfachen Zusammenhängen. Was ist oben, wenn unten eine Kugel liegt? - «3». Was ist, wenn unten 2 Kugeln liegen? – «Beide 2». Was ist, wenn unten 4 liegen? – «Dann hat es unten viel, (ohne zu zählen) 4!, oben nichts mehr.»

Und wenn ich oben 1 dazu nehme? – «Dann sind es fünf», sagte sie, ohne zu zählen. Wenn unten 2 liegen? – «Dann hat es oben 3», antwortet sie auch ohne zu zählen.

Und wie ist es jetzt bei dieser Abbildung 4, wenn wir die Kugel oben beim Rohr auch zu den anderen nehmen? – «7», antwortet sie blitzschnell, «nein, 8», doppelt sie nach. «Was ist jetzt wahr hier oben?» wollte ich wissen. – Lin: «Es sind 7.» (Insgesamt sind es 8 sichtbare Kugeln, aber das habe ich nicht überprüft durch Nachfragen.)

Zuletzt stellte ich die Frage nach Berthoud und Kircher (1987, S. 57f., Aufgabensituation I) bei fünf Kugeln in der oberen Schachtel der Zeichnung. Lin musste nun Kardinalzahlen und Ordinalzahlen kombinieren: «Lin, du lässt eine um die andere Kugel runter. Bevor du die dritte Kugel runter lässt, wartest du kurz für die Frage: «Wie viele hat es unten…. und oben ?» - Lin zählt ab und sagt: «Unten zwei, oben drei.» Das Experiment mit der verdeckten Anlage habe ich nicht durchgeführt.

Ausblick I: Denken und Darstellen

Die ursprüngliche Forschung von Berthoud und Kilcher (1987) ist *eine reichhaltige Plattform* für weitere Entwicklungsarbeiten und Fallstudien. In den Aufgaben wird das Wissen um die Kardinalzahlen mit dem Wissen über die Ordinalzahlen verknüpft. Mit der Spielanlage und der Spielanlage als Modell können die logisch-mathematischen Verhältnisse (Teil-Ganze, arithmetische (mentale) Operationen, Zahlaspekte, Rechengesetze, logisches Schlussfolgern, Darstellungsmittel: konkret bis mündlich abstrakt) in mentale Operationen konvertiert und zu Aussagen über Probleme formuliert werden (vgl. Duval, 1993; Riley, Greeno & Heller, 1983). Es sind nicht bloss Abbildungen, die man abzählen sollte, wie das bei den sogenannten Zahlenhäusern der Fall werden kann. Das Experiment will von Anfang an mehr Denkdruck erzeugen, wie es Wagenschein (1999) nennt. Es erfasst die Denkentwicklung der Kinder und gleichzeitig die methodischen Kompetenzen derjenigen, welche die flexiblen Interviews durchführen.

Ausgewählte Anzahl Kugeln : 8	
unten	oben
1	7

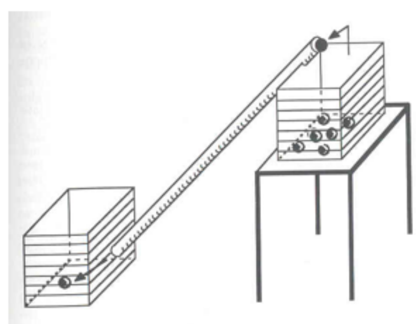

Abbildung 5: Spielanalage und tabellarische Darstellungsform

Die dynamische Untersuchung der Denk- und Handlungsschemata und die dynamische, dialogische und experimentelle mathematische Bildung fokussieren auf die Kunst des logischen und arithmetischen Denkens. Darum sind auch die mentalen Spiele mit dieser Anlage so wichtig. Sie äussern sich in Fragen wie: Stell dir die Anlage mit geschlossenen Augen vor (oder bei abgedeckter Anlage). Was wäre oben und unten, wenn ich von 12 Kugeln die vierte in der Hand hielte und wartete? Usf.

Das pädagogische Entwicklungsziel wäre nicht die Bearbeitung leerer Zahlenhäuser, sondern konkrete und imaginierte Spielanlagen oder andere Modelle wie der Bustransport, welche je nachdem konkret oder symbolisch dargestellt werden könnten (vgl. van den Heuvel-Panzhuizen, 2001). Entscheidend ist das mathematische Gedankenspiel, sei es beim Spiel oder bei den Gedankenspielen und deren Darstellungsformen (enaktiv-bildlich-symbolisch).

Ausblick II: Transportaufgaben und multiplikatives Denken

Mit Schnüren und einer Schuhschachtel wird eine Seilbahn gebastelt (siehe Abbildung 6). Zwei Schnüre sind die Tragseile, zwei Schnüre in der Mitte der Stirnseite der Schachtel befestigt sind die Zugseile nach oben und unten. Die Seilbahn könnte im Freispiel der SuS Verwendung finden. Sie wäre Gegenstand von Projekten im MuU-Unterricht sowie parallel dazu Modell für Mathematisierungen und Denkschulung.

Mit diesem Apparat werden Transportprobleme für grössere Gruppen gespielt und untersucht werden. Die Beschränkung auf kleinere Gruppen wird mit dem maximalen Ladegewicht begründet. Die Spielanlage fordert zum Ordnen, Zählen, Gruppieren, Aufteilen und Multiplizieren heraus.

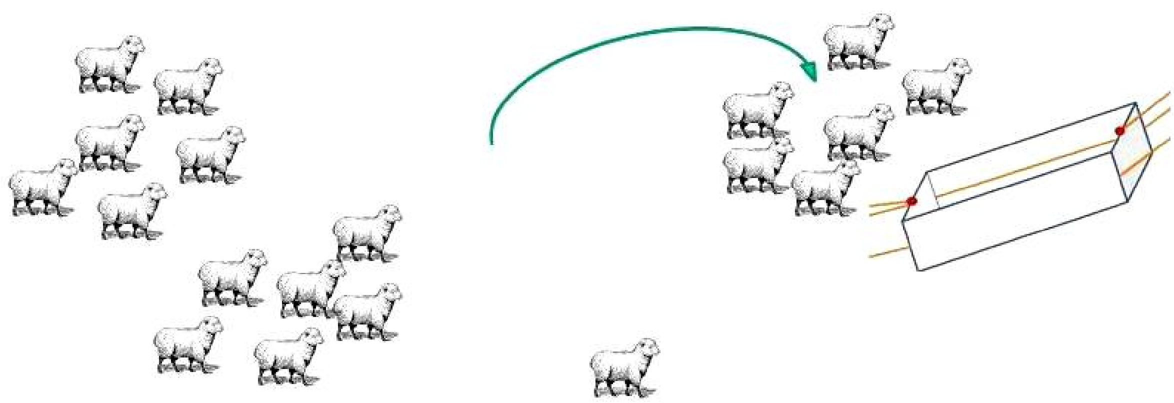

Abbildung 6: Spielanalage der Seilbahn

Abbildung 6 illustriert exemplarisch ein Transportproblem für 19 Schafe. Die Seilbahn kann immer nur 6 Schafe aufs Mal auf die Alp transportieren. Die Schafe werden in Sechsergruppen aufgeteilt und transportiert. Ein Schaf muss allein fahren, sagt die Arithmetik. Es ist aber empfohlen, diese Tiere nicht allein zu lassen, sodass die beiden letzten Fahrten anders aussehen, z.B. 3+4 oder 5+2 Schafe. Die Kinder können gefragt werden, wie viele Fahrten es braucht, bis alle oben sind.
Die Gesamtzahl wird berücksichtigt oder teilweise berechnet, d.h. das Kind kann in strukturierten Mengen zählen: 6 plus 6 gibt 12, plus 6 gibt 18 und das hier noch gibt 19. Es könnte auch multiplikativ und additiv argumentieren: 2 mal 6 plus 3+4. Jede Aussage würde das Distributivgesetz implizit oder explizit zur Anwendung bringen und Lösungen für das Transportproblem zum Ausdruck bringen. D.h. das spielerisch dargestellte Transportproblem wird in eine arithmetische Zeichensprache konvertiert (vgl. Duval, 1993).

Mit dem flexiblen Interview könnten analog zur Variante in Abbildung 5 die folgenden Denkschemata untersucht werden. Man zeigt dem Kind alle 19 Schafe (die Anzahl lässt sich variieren, siehe Abbildung 6). Die Talstation wäre vergleichsweise «Schachtel» (sprich Variable), die Alp oder die Bergstation die zweite Variable. Eine Variante besteht darin, dass das Kind nur noch die Situation auf der Bergstation

(Alp) betrachtet und auf die Fragen Antwort geben soll. „Hier sind 6 Schafe, wie viele sind dann noch unten?“ „Wenn die 2. Seilbahnfahrt mit 6 Schafen oben angekommen sind, wie viele sind dann noch unten?“ „Warte, bevor du die 2. Seilbahnfahrt beginnst. Wie viele hat es oben? Wie viele hat es unten bei der Talstation?“

Die Apparate (Kugelbahn, Seilbahn) sind, wie die Skizzen zeigen, Spielzeuge und Modelle. Man kann mit ihnen Denkschemata wie die Invarianz, die Teil-Ganze-Relation, die Ordinal- und die Kardinalzahlen, das additive und das multiplikative Denken, das Divisions-Schema sowie exekutive Funktionen (vgl. Bardikoff & Sabbagh (2017) untersuchen.

Correa, Nunes & Bryant (1998) sowie Kornilaki (1999) haben die **Entwicklung der Divisions-Schemata** bei kleinen Kindern intensiv beforscht, welche die Division in der Schule noch nicht behandelt hatten. Dabei unterschieden sie zwischen dem Aufteilen (Share-out) und der quotitiven Division. Bei den flexiblen Interviews mussten die Kinder Hasen mit Süssigkeiten (sic!) füttern. Wir haben an der HfH diese Interviews realistischer gemacht, die Tiere bekommen Karotten. Abgesehen davon, dass die Kinder mit soliden Invarianzschemata bessere Antworten gaben, wurde in diesen Studien auch gezeigt, dass das Aufteilen (share-out) eher zu den Grundkenntnissen gezählt werden kann als die quotitive Division. – Diese wäre z.B. auch bei der Seilbahn gefragt, wenn man bei einer Transportaufgabe mit einer Kabine fragen würde, wie viele <u>Fahrten</u> es benötige, bis alle Tiere auf der Alp sind. Man kann keine 1:1 Zuordnung zu diversen Kabinen machen, also nicht mit dem share-out operieren. Ebenso sollte man nicht mehr annehmen, dass sich das Multiplikations- und das Divisionsschema gleichzeitig entwickeln, auch wenn die Annahme logisch-mathematisch einleuchtend erscheint.

Die Kinder müssen sich bei der Division mit den operativen Invarianten auseinandersetzen, die dieses Konzept bestimmen:

(i) alle Teile einer Menge müssen gleich gross sein;
(ii) die Grösse der Menge ist bestimmbar durch die Anzahl der Teile, welche multipliziert werden mit der Grösse der Teile plus dem Rest;
(iii) es gibt eine inverse Co-Variation zwischen der Grösse der Teile und der Anzahl der Teile;
(iv) die ganze Menge muss vollständig geteilt werden bis die übriggebliebenen Elemente nicht mehr für eine weitere Verteilung ausreichen; und
(v) der Rest kann nicht grosser oder gleich sein wie die Anzahl der Teile oder die Grösse der Teile. (Fischbein, Deri, Nello and Marino, 1985; Harel and Cofrey, 1994; Kouba,1989; Nunes and Bryant, 1996). (vgl. Lautert, Spinillo & Correa (2012, S. 447 ; Übersetzung S. Meyer)

Nach Bryant & Nunes (1996) verfügen schon kleine Kinder über erstaunliche Denkschemata, was das In-Beziehung-Setzen von eins-zu-vielen betrifft. Das kann mit dem Transportmodell schon auf etwas abstrakterem Niveau erkundet und erörtert werden.

Der Bezug auf die Mathematik zeigt auf, dass es auch um handlungsreiche und bedeutsame **Algebra als Sprache und Tätigkeit** geht (vgl. Freudenthal, 1983). Die Teilbarkeit und das Vervielfachen sind weitere Aspekte von Zaheln, welche mit Hilfe dieser Apparate in Erfahrung gebracht werden können (vgl. Padberg, 2011). Bei der Kugelbahn geht es vorerst um Vielfache von 1, bei der Seilbahn kann das leicht erweitert werden.

Variablen können verschieden aufgefasst werden. Je nach den erkenntnisleitenden Fragen im Umgang mit diesen Apparaten, kann eine Variable als Unbekannte (vgl. Abbildung 4: 4 Kugeln unten plus unbekannte oben bilden die Gesamtmenge der 7 Kugeln. D.h. 4 + x = 7). Die Variable kann aber auch als «das Unbestimmte» aufgefasst werden (vgl. Abb. 6. x + y = z. D.h., dass die Variable z für alle beliebigen Gesamtmengen der Transportieren steht, welche durch die Teilmenge der Elemente bei der Talstation und der Teilmenge der Elemente auf der Bergstation ermittelt werden können.)

Wenn wir bei Abb. 6 einen Schritt weiter gehen und die Frage untersuchen, wie sich die Variablen[1] verändern, wenn die Transportkapazität vergrössert oder verkleinert wird, so haben wir es mit Variablen als Veränderliche zu tun (vgl. Freudenthal, 1983; Akinwunmi, 2012):

$z = x \cdot k + r$, wobei z für die Menge aller Transportierten steht, x für die Anzahl der Fahrten, k für die Transportkapazität und r für Zahl der Schafe des letzten Transports.

$\frac{z}{k} = x$, wenn r = 0, da z ohne Rest durch k teilbar ist;

wenn $1 \leq r \leq k$, dann braucht es eine zusätzliche Fahrt;

Dass Schafe nicht allein transportiert werden sollten, kann algebraisch wie folgt dargestellt werden:

$z = x \cdot k + r$ falls $r > 1$

$z = (x-1) \cdot k + (k-1) + 1$ falls $r=1$

Methodischer Ausblick

Diese Modelle könnten zudem mit dem Methodenkonzept der kognitiven Akzeleration kombiniert werden. Der Ansatz vereinigt die Grundannahmen von Piaget mit denjenigen von Wygotski (vgl. Adey, 2008). Die Modelle stehen im Einklang mit dem «Experimental Teaching» (vgl. Steffé, 2000) und allen Handlungsaspekten des Lehrplans 21. Die Projektmethode nach Frey (2010) ermöglicht offenes und

[1] Ich danke Andy Ruf, dipl.math., für die Zusammenarbeit.

strukturiertes Unterrichten, in welchem das flexible Interview (vgl. Meyer, 2006) beobachten, unterstützen und forschen hilft. Das multimethodische Vorgehen hat sich, wie Fallstudien der HfH zeigen, für alle Beteiligten sehr bewährt (vgl. Lanthaler-Schuler, 2007; Hofer & Liniger, 2015; Schreiner, 2016; Capiaghi, 2018).

Literatur

Adey, P. (2008). *Let's Think! Handbook. A Guide to Cognitive Acceleration in the Primary School*. London: GL assessment.

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Springer-Verlag.

Bardikoff, N. & Sabbagh, M. (2017). The Differentiation of Executive Functioning Across Development: Insights from Developmental Cognitive Neuroscience. In N. Budwig, E. Turiel & P.D. Zelazo (Hrsg.), *New Perspectives on Human Development* (S. 47–66). Cambridge: Cambridge University Press. Kindle Version.

Berthoud, I., Kilcher, H. (1987). Implications et significations arithmétiques. In J. Piaget, R.,Garcia (Hrsg.), *vers une logique des significations* (S. 57-71). Genève: Édition Murionde.

Capiaghi, M. (2018). *Denkschulung stärkt alle. Kognitive Akzeleration in motivierenden Themen der Schulmathematik*. Masterarbeit. Zürich: Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik.

Correa, J., Nunes, T. & Bryant, P. (1998). Young Children's Understanding of Division: The Relationship Between Division Terms in a Noncomputational Task. *Journal of Educational Psychology*, *90* (2), 321–329.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*, 37–65.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Hofer, K. & Liniger, S. (2015). *Mathematikbox 0.5. Eine Förderbox mit Spielen zum Festigen der Zählkompetenz*. Unveröffentlichte Masterarbeit. Zürich: Hochschule für Heilpädagogik.

Kornilaki, E. N. E. (1999). *YOUNG CHILDREN'S UNDERSTANDING OF MULTIPLICATIVE CONCEPTS. A PSYCHOLOGICAL APPROACH*. London: University of London.

Lanthaler-Schuler, C. (2007). *Sachrechnen und Mathematisieren: Förderung des Interesses an und des Verstehens von mathematischem Lernen unter Berücksichtigung der Binnendifferenzierung mit Kindern mit besonderem Förderbedarf*. Unveröffentlichte Diplomarbeit. Zürich: Hochschule für Heilpädagogik.

Lautert, S. L., Spinillo, A. G. & Correa, J. (2012). Children's difficulties with division: an intervention study. *Educational Research*, *3* (5), 447–456.

Meyer, S. (2006). Das flexible Interview. Zugriff am 20.1.2019. Verfügbar unter: http://www.interview.hfh.ch

Nunes T, Bryant P (1996). *Children doing mathematics.* Oxford: Blackwell.

Padberg, F. (2011). *Didaktik der Arithmetik* (4., erweiterte, stark überarbeitete Auflage.). Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Riley, M. S., Greeno, J.G., Heller, J.I. (1983). Development of Children's Problem-Solving Ability in Arithmetic. In H. P. Ginsburg (Hrsg.), *The Development Of Mathematical Thinking* (S. 153-196). Orlando: Academic Press Inc. (Übersetzung Stefan Meyer, 2013)

Schreiner, C. (2016). *Spielend denken, denkend spielen. Mathematisches Spielprojekt zum Themeninhalt „Geld"*. Unveröffentl. Praxisprojekt. Zürich: Interkantonale Hochschule für Heilpädagogik.

Steffe, L. P. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh (Hrsg.), *Research design in mathematics and science education* (S. 267–307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Realistic Mathematics Education as work in progress. In F.-L. Lin (Hrsg.), *Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education* (S. 1–43). Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University.

Wagenschein, M. (1999). *Verstehen lehren*. Weinheim: Beltz Verlag.